



**Игорь Викторович Антонец,**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент Сыктывкарского  
государственного университета  
имени Питирима Сорокина



**Владимир Григорьевич Шавров,**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий лабораторией  
магнитных явлений в микроэлектронике  
Института радиотехники и электроники  
имени В. А. Котельникова РАН



**Владимир Игнатьевич Щеглов,**  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
Института радиотехники и электроники  
имени В. А. Котельникова РАН



**ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ**  
**МЕТОДЫ РАСЧЕТА: ИМПЕДАНСА, ИСКЛЮЧЕНИЯ, ПЕРЕОТРАЖЕНИЙ**

ЧАСТЬ 2



И. В. АНТОНЕЦ  
В. Г. ШАВРОВ  
В. И. ЩЕГЛОВ

# ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ

ЧАСТЬ 2

## МЕТОДЫ РАСЧЕТА: ИМПЕДАНСА, ИСКЛЮЧЕНИЯ, ПЕРЕОТРАЖЕНИЙ



И. В. АНТОНЕЦ  
В. Г. ШАВРОВ  
В. И. ЩЕГЛОВ

# ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ

ЧАСТЬ 2

## МЕТОДЫ РАСЧЕТА: ИМПЕДАНСА, ИСКЛЮЧЕНИЯ, ПЕРЕОТРАЖЕНИЙ

*Рекомендовано Федеральным учебно-методическим объединением в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 03.00.00 «Физика и астрономия» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки уровня магистратуры «Прикладные математика и физика» (03.04.01), «Физика» (03.04.02), «Радиофизика» (03.04.03), специалитета по специальности «Фундаментальная и прикладная физика» (03.05.02)*



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2024

УДК 537.874; 537.624

ББК 22.33

В 67

Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. **Волны в многослойных структурах. Часть 2. Методы расчета: импеданса, исключения, переотражений.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2024. — 408 с. — ISBN 978-5-9221-1980-1.

Издание посвящено изложению основ методов расчета распространения одномерных и электромагнитных волн через многослойные структуры. Методами импеданса, исключения и переотражения определены параметры распространяющихся волн, а также коэффициенты отражения и прохождения в зависимости от энергии. Основное внимание уделено методам импеданса, а также методу исключения, имеющим достаточно универсальный характер и допускающим простую машинную алгоритмизацию для структур с произвольным числом слоев. Приведена схема метода переотражений, имеющего значительную ценность для ряда специфических случаев. Решены некоторые задачи прикладного характера. Приведено множество примеров и даны методические рекомендации, предназначенные для самостоятельной работы учащихся.

Книга предназначена специалистам, работающим в областях физики волновых процессов, электродинамики, магнитных явлений, акустики, инженерам и конструкторам СВЧ-оптической и акустической аппаратуры, а также студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

#### Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор  
*А. К. Звездин* (главный научный сотрудник ИОФ им. А.М. Прохорова РАН);

доктор физико-математических наук, профессор  
*В. Н. Прудников* (физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова)

ISBN 978-5-9221-1980-1

© ФИЗМАТЛИТ, 2024

© И. В. Антонец, В. Г. Шавров,  
В. И. Щеглов, 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> . . . . .	11
<b>Глава 1. Импеданс как общая характеристика различных волновых процессов</b> . . . . .	17
1.1. Общее понятие об импедансе . . . . .	17
1.1.1. Введение импеданса на основе закона Ома . . . . .	18
1.1.2. Импеданс активных и реактивных элементов . . . . .	18
1.2. Импеданс цепи с последовательным соединением активных и реактивных элементов . . . . .	20
1.2.1. Замечание об общности выражений для импедансов реактивных элементов . . . . .	21
1.3. Волновой процесс и импеданс в двухпроводной линии . . . . .	22
1.3.1. Импеданс двухпроводной линии с потерями . . . . .	26
1.3.2. Общность понятия длинной линии . . . . .	28
1.4. Волновое уравнение для гибкой струны . . . . .	29
1.4.1. Замечание о жесткой струне . . . . .	32
1.5. Общее определение импеданса из волнового уравнения . . . . .	32
1.5.1. Определение параметра нормировки для длинной линии . . . . .	35
1.5.2. Замечание о выборе переменных . . . . .	36
1.6. Импеданс для одномерной волны . . . . .	37
1.6.1. Граничные условия для одномерной волны . . . . .	39
1.7. Волновое уравнение для акустической волны в жидкости . . . . .	40
1.7.1. Импеданс для акустической волны . . . . .	43
1.7.2. Граничные условия для акустической волны . . . . .	45
1.8. Волновое уравнение для электромагнитной волны . . . . .	46
1.8.1. Импеданс для электромагнитной волны . . . . .	47
1.8.2. Граничные условия для электромагнитной волны . . . . .	51
1.9. Общность волновых явлений разной природы . . . . .	52
1.10. Размерность и физический смысл понятия импеданса . . . . .	54
1.10.1. Одномерная волна . . . . .	55
1.10.2. Акустика . . . . .	55
1.10.3. Электродинамика . . . . .	55
1.11. Замечание о физическом смысле понятия импеданса . . . . .	56
Выводы по главе 1 . . . . .	57
<b>Глава 2. Обобщенный импеданс для волновых процессов</b> . . . . .	59
2.1. Основание для введения обобщенного импеданса . . . . .	59
2.2. Обобщенный импеданс для одномерной волны . . . . .	60

2.3. Обобщенный импеданс для акустической волны . . . . .	61
2.3.1. Продольное распространение вдоль оси $Ox$ . . . . .	61
2.3.2. Наклонное распространение относительно оси $Ox$ . . . . .	62
2.4. Обобщенный импеданс для электромагнитной волны . . . . .	65
2.4.1. Продольное распространение вдоль оси $Ox$ . . . . .	65
2.4.2. Наклонное распространение относительно оси $Ox$ , про- дольная поляризация . . . . .	67
2.4.3. Наклонное распространение относительно оси $Ox$ , попе- речная поляризация . . . . .	69
2.5. Обобщенный импеданс для различных волновых процессов . . .	71
2.5.1. Одномерная волна . . . . .	71
2.5.2. Акустическая волна, продольное распространение . . . . .	71
2.5.3. Акустическая волна, наклонное распространение . . . . .	71
2.5.4. Электромагнитная волна, продольное распространение . .	71
2.5.5. Электромагнитная волна, наклонное распространение, продольная поляризация . . . . .	71
2.5.6. Электромагнитная волна, наклонное распространение, по- перечная поляризация . . . . .	72
2.5.7. Общий вид формулы для импеданса . . . . .	72
2.6. Сводная таблица импедансов . . . . .	72
Выводы по главе 2 . . . . .	73
<b>Глава 3. Основные приемы работы с обобщенным импедансом. . .</b>	<b>74</b>
3.1. Распространение одномерной волны через одну и две границы	74
3.1.1. Одна граница . . . . .	74
3.1.2. Две границы . . . . .	76
3.2. Последовательное применение прямого метода импеданса к двум границам . . . . .	78
3.3. Прямой метод импеданса для двух границ . . . . .	82
3.4. Метод последовательных вычислений . . . . .	84
3.4.1. Метод входного и выходного импедансов . . . . .	84
3.4.2. Пересчет импеданса с последующей границы на предыду- щую при падении прямой волны . . . . .	86
3.4.3. Пересчет импеданса с последующей границы на предыду- щую при падении встречной волны . . . . .	88
Выводы по главе 3 . . . . .	90
<b>Глава 4. Применение обобщенного импеданса для решения задач о распространении одномерных волн . . . . .</b>	<b>92</b>
4.1. Основные принципы рассмотрения волн в структурах, содержа- щих от двух до пяти сред . . . . .	92
4.2. Волны в структуре, содержащей две среды . . . . .	92
4.3. Волны в структуре, содержащей три среды . . . . .	95
4.3.1. Решение прямым методом . . . . .	97
4.3.2. Решение методом входного импеданса . . . . .	98
4.3.3. Выходящая встречная волна при падении прямой волны	98

---

4.3.4. Выходящая прямая волна при падении прямой волны . . .	99
4.3.5. Выходящая прямая волна при падении встречной волны	101
4.3.6. Выходящая встречная волна при падении встречной волны . . . . .	101
4.4. Волны в структуре, содержащей четыре среды . . . . .	103
4.4.1. Решение методом входного импеданса . . . . .	105
4.4.2. Выходящая встречная волна при падении прямой волны	105
4.4.3. Выходящая прямая волна при падении прямой волны . . .	106
4.4.4. Выходящая прямая волна при падении встречной волны	108
4.4.5. Выходящая встречная волна при падении встречной волны . . . . .	109
4.5. Волны в структуре, содержащей пять сред . . . . .	110
4.5.1. Выходящая встречная волна при падении прямой волны	112
4.5.2. Выходящая прямая волна при падении прямой волны . . .	113
4.5.3. Выходящая прямая волна при падении встречной волны	115
4.5.4. Выходящая встречная волна при падении встречной волны . . . . .	116
4.6. Волны в структуре, содержащей произвольное число сред . . . .	117
4.7. Общая схема пересчета входного импеданса от последующей среды к предыдущей . . . . .	120
4.8. Реализация общей схемы пересчета импеданса на примере трех сред . . . . .	121
4.9. Пересчет импеданса при произвольном числе сред . . . . .	123
4.9.1. Применение пересчета импеданса для получения амплитуд выходящих волн . . . . .	124
4.9.2. Выходящая встречная волна при падении прямой волны	124
4.9.3. Выходящая прямая волна при падении встречной волны	125
4.10. Общая схема пересчета амплитуд от последующей среды к предыдущей . . . . .	126
4.11. Реализация общей схемы пересчета амплитуд на примере трех сред . . . . .	128
4.12. Пересчет амплитуд при произвольном числе сред . . . . .	129
4.12.1. Выходящая прямая волна при падении прямой волны . .	130
4.12.2. Выходящая встречная волна при падении встречной волны . . . . .	131
Выводы по главе 4 . . . . .	132
<b>Глава 5. Применение обобщенного импеданса для решения задач о распространении волн различной природы . . . . .</b>	<b>134</b>
5.1. Замечание о единообразии применения импедансных методов для различных случаев . . . . .	134
5.2. Учет преломления волн на границах между средами . . . . .	135
5.3. Одномерная волна . . . . .	136
5.3.1. Падение прямой волны . . . . .	137
5.3.2. Падение встречной волны . . . . .	138

5.4. Акустическая волна в жидкости. Нормальное падение . . . . .	140
5.5. Акустическая волна в жидкости. Наклонное падение. . . . .	140
5.5.1. Падение прямой волны . . . . .	142
5.5.2. Падение встречной волны . . . . .	144
5.6. Электромагнитная волна. Нормальное падение . . . . .	145
5.6.1. Падение прямой волны . . . . .	147
5.6.2. Падение встречной волны . . . . .	148
5.7. Электромагнитная волна. Наклонное падение. Продольная поляризация . . . . .	149
5.7.1. Падение прямой волны . . . . .	151
5.7.2. Падение встречной волны . . . . .	152
5.8. Электромагнитная волна. Наклонное падение. Поперечная поляризация . . . . .	153
5.8.1. Падение прямой волны . . . . .	155
5.8.2. Падение встречной волны . . . . .	156
Выводы по главе 5 . . . . .	156
<b>Глава 6. Адаптация метода импеданса к решению практических задач. . . . .</b>	<b>158</b>
6.1. Обобщенный импеданс для одномерной волны . . . . .	158
6.1.1. Общая геометрия задачи . . . . .	161
6.1.2. Общий характер последовательного рассмотрения . . . . .	163
6.2. Пересчет импедансов . . . . .	163
6.2.1. Входной и выходной импедансы . . . . .	163
6.2.2. Граничное условие для импедансов . . . . .	165
6.2.3. Формулировка задачи пересчета импедансов . . . . .	165
6.2.4. Пересчет импедансов для соседствующих сред . . . . .	165
6.2.5. Особенность пересчета на конце структуры . . . . .	167
6.2.6. Схема пошагового пересчета импедансов . . . . .	168
6.2.7. Коэффициент отражения . . . . .	169
6.3. Пересчет амплитуд. . . . .	171
6.3.1. Смещения . . . . .	172
6.3.2. Импедансы . . . . .	173
6.3.3. Амплитуды прямой и встречной волн . . . . .	174
6.3.4. Полная схема пересчета амплитуд . . . . .	175
6.3.5. Схема пошагового пересчета амплитуд . . . . .	178
6.3.6. Коэффициенты отражения и прохождения . . . . .	179
6.4. Сравнение пересчета импедансов с пересчетом амплитуд . . . . .	180
Выводы по главе 6 . . . . .	180
<b>Глава 7. Применение метода импеданса для расчета распространения волны через прямоугольный барьер . . . . .</b>	<b>183</b>
7.1. Геометрия задачи и основные уравнения . . . . .	183
7.2. Единичный барьер . . . . .	185
7.3. Действительный отрицательный барьер . . . . .	186

---

7.3.1. Аналитическое моделирование периодичности наблюдаемых зависимостей . . . . .	187
7.3.2. Изменение волнового числа . . . . .	191
7.3.3. Периодичность смены режимов . . . . .	192
7.4. Действительный положительный барьер . . . . .	194
7.4.1. Периодичность импеданса при изменении волнового числа . . . . .	195
7.4.2. Периодичность импеданса при изменении координаты . . . . .	196
7.5. Коэффициент отражения . . . . .	198
7.5.1. Изменение высоты барьера . . . . .	201
7.6. Модель резонанса внутри барьера . . . . .	201
7.6.1. Изменение длины барьера . . . . .	204
7.7. Комплексный барьер . . . . .	206
Выводы по главе 7 . . . . .	209
<b>Глава 8. Применение метода импеданса для расчета распространения волны через ступенчато нарастающий барьер . . . . .</b>	<b>213</b>
8.1. Геометрия задачи и основной математический аппарат . . . . .	213
8.2. Распределение волновых чисел и длин волн по слоям структуры . . . . .	216
8.2.1. Пример распределения для структуры из 16 слоев . . . . .	217
8.3. Формирование амплитуды колебаний при различной длине структуры . . . . .	218
8.4. Коэффициенты отражения и прохождения при крайних значениях волновых чисел . . . . .	219
8.5. Коэффициент отражения при изменении длины структуры . . . . .	220
8.5.1. Уровень отклонения коэффициента отражения от максимального значения . . . . .	223
8.5.2. Интерпретация линейного характера зависимости длины структуры от максимальной длины волны . . . . .	225
8.6. Коэффициент прохождения при изменении длины структуры . . . . .	227
8.7. Отражение, прохождение и поглощение в диссипативной среде . . . . .	228
8.8. Отражение, прохождение и поглощение в среде с отрицательной диссипацией . . . . .	230
Выводы по главе 8 . . . . .	233
<b>Глава 9. Определение с помощью метода импеданса критерия применимости ступенчатого приближения линейно-неоднородной среды . . . . .</b>	<b>236</b>
9.1. Обоснование необходимости получения критерия применимости ступенчатого приближения . . . . .	236
9.2. Общая геометрия задачи . . . . .	238
9.3. Ступенчатое приближение . . . . .	239
9.3.1. Схема ступенчатой структуры . . . . .	241
9.4. Общие характеристики распространяющихся волн . . . . .	242



9.5. Базовые распределения волновых чисел . . . . .	244
9.5.1. Критическое значение максимального волнового числа . . . . .	246
9.5.2. Степень приближения линейной структуры ступенчатой . . . . .	249
9.6. Замечание о других видах неоднородностей . . . . .	251
9.6.1. Некоторые возможности дальнейшей разработки . . . . .	255
Выводы по главе 9 . . . . .	256
<b>Глава 10. Метод исключения . . . . .</b>	<b>259</b>
10.1. Геометрия задачи, волновые функции и граничные условия. . . . .	259
10.1.1. Волновые функции первого и второго рода . . . . .	260
10.1.2. Граничные условия . . . . .	261
10.2. Условия сопряжения для волновых функций. . . . .	261
10.2.1. Прямой метод . . . . .	261
10.2.2. Метод усреднения . . . . .	264
10.3. Входящие и выходящие волны относительно всей структуры в целом . . . . .	267
10.4. Соотношения прямой передачи. . . . .	269
10.4.1. Прямая передача первого рода . . . . .	269
10.4.2. Прямая передача второго рода . . . . .	271
10.5. Процедура последовательных подстановок . . . . .	273
10.6. Входная и выходная ячейки . . . . .	275
10.6.1. Начало структуры (среды 1 и 2) . . . . .	275
10.6.2. Замечания относительно входного конца структуры . . . . .	278
10.6.3. Конец структуры (среды $N - 1$ и $N$ ) . . . . .	279
10.6.4. Замечание относительно выходного конца структуры . . . . .	281
10.7. Произвольное число сред . . . . .	282
10.7.1. Амплитуды выходящих волн. Передача во всех средах кроме первой и последней . . . . .	282
10.7.2. Амплитуды выходящих волн при учете передачи во всех средах . . . . .	283
10.8. Две среды . . . . .	285
10.8.1. Амплитуды выходящих волн при передаче в обеих средах . . . . .	285
10.9. Три среды. . . . .	288
10.9.1. Амплитуды выходящих волн. Передача во второй среде . . . . .	288
10.9.2. Амплитуды выходящих волн в общем виде для методов прямого и усреднения. Передача во второй среде . . . . .	290
10.9.3. Амплитуды выходящих волн. Передача во второй и третьей средах . . . . .	292
10.9.4. Амплитуды выходящих волн. Передача во всех средах . . . . .	294
10.10. Четыре среды . . . . .	297
10.10.1. Амплитуды выходящих волн. Передача во второй и третьей средах . . . . .	297
10.10.2. Амплитуды выходящих волн. Передача во всех средах . . . . .	299
10.11. Пять сред . . . . .	302
10.11.1. Амплитуды выходящих волн. Передача во всех средах . . . . .	302

---

10.12. Полная процедура последовательных подстановок. Условия сопряжения . . . . .	304
10.13. Произвольное число сред. амплитуды выходящих волн в общем виде при передаче во всех средах . . . . .	309
10.14. Схема численной реализации метода исключения . . . . .	312
10.15. Возможные варианты передачи для структуры, состоящей из произвольного числа сред . . . . .	314
10.16. Обобщение на случай электромагнитных волн . . . . .	315
Выводы по главе 10 . . . . .	317
<b>Глава 11. Применение метода исключения для задач о распространении волн через структуры с линейными и квадратичными неоднородностями . . . . .</b>	<b>320</b>
11.1. Линейная неоднородность . . . . .	320
11.2. Квадратичная полуцилиндрическая неоднородность . . . . .	323
11.3. Полуэллиптическая неоднородность . . . . .	325
11.3.1. Приближение полуэллиптической неоднородности ступенчатой структурой . . . . .	326
11.3.2. Критерий применимости ступенчатого приближения . . . . .	327
11.3.3. Полуэллиптические неоднородности частных видов . . . . .	328
Выводы по главе 11 . . . . .	329
<b>Глава 12. Применение метода исключения для задач о распространении волн через структуры с барьерными и периодическими неоднородностями . . . . .</b>	<b>331</b>
12.1. Геометрия задачи и схема барьерной неоднородности . . . . .	331
12.2. Метод исключения для барьерной неоднородности . . . . .	333
12.2.1. Энергетические параметры распространения волн . . . . .	334
12.2.2. Зависимость от частоты и диссипации среды . . . . .	334
12.3. Прохождение волны через единичный барьер . . . . .	335
12.3.1. Изменение длины единичного барьера . . . . .	337
12.4. Прохождение волны через два единичных барьера . . . . .	339
12.4.1. Изменение расстояния между барьерами . . . . .	339
12.4.2. Изменение длины барьеров . . . . .	341
12.5. Произвольное количество и длина барьеров . . . . .	342
12.6. Периодическая неоднородность из единичных барьеров . . . . .	343
12.6.1. Малое количество барьеров . . . . .	343
12.6.2. Большое количество барьеров . . . . .	345
12.7. Вторичная модуляция коэффициентов отражения и прохождения . . . . .	349
12.7.1. Зависимости коэффициентов от частоты . . . . .	349
12.7.2. Изменение соотношения скоростей . . . . .	350
12.7.3. Изменение протяженностей промежутков . . . . .	352
12.7.4. Влияние диссипации на вторичную модуляцию . . . . .	353
12.7.5. Возможный механизм вторичной модуляции . . . . .	354
12.8. Обобщение на случай электромагнитных волн . . . . .	355

12.8.1. Электромагнитная волна в проводящей среде . . . . .	356
Выводы по главе 12 . . . . .	358
<b>Глава 13. Применение метода исключения для задачи о распространении волн через структуры со случайными неоднородностями . . . . .</b>	<b>361</b>
13.1. Геометрия задачи и схема метода расчета . . . . .	361
13.2. Задание случайного характера распределения волновых чисел. . . . .	362
13.3. Отражение волны от двухслойной структуры . . . . .	364
13.4. Отражение волны от многослойной структуры различной длины	366
13.4.1. Плотность распределения амплитуды . . . . .	366
13.4.2. Амплитуда отраженной волны . . . . .	369
13.5. Отражение при изменении характера случайности внутренних слоев структуры . . . . .	370
13.6. Некоторые заключительные замечания . . . . .	373
Выводы по главе 13 . . . . .	374
<b>Глава 14. Метод переотражений . . . . .</b>	<b>376</b>
14.1. Место метода переотражений в настоящем рассмотрении . . . . .	376
14.2. Падение волны прямого направления . . . . .	377
14.2.1. Общая геометрия задачи . . . . .	377
14.2.2. Представление единичной ячейки . . . . .	379
14.2.3. Частичные коэффициенты отражения и прохождения . . . . .	380
14.2.4. Амплитуды частичных волн . . . . .	380
14.2.5. Амплитуды внешних волн . . . . .	382
14.2.6. Амплитуды внутренних волн . . . . .	384
14.3. Сравнение с прямым методом. . . . .	386
14.4. Выражение коэффициентов отражения и прохождения для одной границы через волновые числа соседствующих сред. . . . .	388
14.5. Падение волны встречного направления. . . . .	390
14.5.1. Общая геометрия задачи . . . . .	390
14.5.2. Представление единичной ячейки . . . . .	392
14.5.3. Частичные коэффициенты отражения и прохождения . . . . .	393
14.5.4. Амплитуды частичных волн . . . . .	393
14.5.5. Амплитуды внешних волн . . . . .	394
14.5.6. Амплитуды внутренних волн . . . . .	395
14.6. Некоторые заключительные замечания . . . . .	397
Выводы по главе 14 . . . . .	397
<b>Литература . . . . .</b>	<b>399</b>

## Введение

Настоящая монография посвящена вопросу распространения волн в многослойных структурах и является второй частью, продолжением и развитием монографии: Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. «Волны в многослойных структурах. Часть 1. Методы расчета: прямой, усреднения, матрицы» [1].

Исследование распространения волн различной природы через слоистые и неоднородные среды и структуры издавна привлекает внимание исследователей [2–14]. До недавнего времени в большинстве решенных задач рассматривались электромагнитные и акустические волны, законы распространения которых в различных средах имеют много общего [4]. В оптике весьма подробно были исследованы два вида сред — диэлектрики, у которых проводимость полностью отсутствует, и металлы, проводимость которых весьма велика [3, 5–7, 9]. В диапазоне СВЧ, наряду с диэлектриками, значительное внимание до сих пор уделяется гиротропным средам — ферритам, по существу представляющим собой также диэлектрики, гиротропные свойства которых проявляют резонансный характер [15–26]. В последнее время расширяются работы по фотонным, фононным и магнонным кристаллам, близким к диэлектрикам с сильно выраженными резонансными свойствами [27–29], по биизотропным, бианизотропным и киральным диэлектрическим средам [30], по аперiodическим тонкослойным структурам [31, 32], в том числе с учетом нестационарного характера распространения волн [33–37]. Значительное внимание привлекает распространение обратных волн [38–48]. Особую группу сред составляют тонкие (наноразмерные) металлические пленки, проводимость которых меняется в зависимости от толщины за счет явления перколяции [49–53].

Важнейшей задачей в исследовании многослойных структур является расчет амплитуд распространяющихся, проходящих и отраженных волн, а также получение коэффициентов отражения и прохождения по энергии, характеризующие структуру в целом [3, стр. 85–87], [1, стр. 74–198, главы 2–4]. Наиболее последовательным здесь является прямой метод, состоящий в решении волнового уравнения в отдельных слоях структуры с последующим сшиванием на границах [1, стр. 199–251]. Некоторым недостатком прямого метода является нарастание сложности вычислений при увеличении числа слоев, происходящее в геометрической прогрессии, что ограничивает применение метода к структурам, содержащим более пяти слоев [1, стр. 259].

Для более сложных структур используются методы последовательных вычислений, позволяющие при расчете переходить последовательно от одного слоя к другому при сравнительной простоте вычислений на каждом промежуточном этапе. Наибольшее распространение здесь имеют метод матрицы [3, стр.81–85], [1, стр. 252–410] и метод импеданса [4, 8]. Метод матрицы, кроме оптики [3, стр. 81–85], [31, 32], широко используется в электродинамике, в том числе при расчете элементов волноводной техники СВЧ диапазона [15, стр. 440–468]. Метод импеданса, наряду с применением в электротехнике [53, стр. 210–237], подробно развит для задач акустики [4, 8].

В то же время, несмотря на огромное многообразие перечисленных задач и многих других, здесь не упомянутых, математическое содержание большинства из них является сходным, то есть состоит в применении одних и тех же математических приемов при решении весьма похожих уравнений с близкими по виду граничными условиями. Наиболее широким классом здесь, по-видимому, являются задачи электродинамики, касающиеся распространения электромагнитных волн.

В этом плане одной из целей настоящей монографии является демонстрация возможности сведения подобных задач, в первую очередь касающихся электродинамики, к более простым задачам о распространении через слоистые структуры одномерных волн, простейшим примером которых являются волны в струне [54, стр. 23–27], [55, стр. 9–13]. Другой целью является рассмотрение различных методов решения таких задач и сравнение между ними, в том числе применительно к ряду неоднородностей характерных видов.

В значительной части монография представляет собой развернутую компиляцию из более ранних монографий авторов [56–64] в совокупности с дополняющими их статьями [65–106] и многочисленными разработками авторов, не нашедшими места в вышедших публикациях.

Монографии [56–64] издавались последовательно в течение 2010–2017 годов, в хронологической согласованности с работами авторов. Дополняющие монографии статьи [65–106] также публиковались в разное время. По этой причине порядок и очередность изложения материала, в том числе хронологическая последовательность выхода публикаций, не являются оптимальными. Поэтому в настоящей монографии порядок изложения будет диктоваться не хронологическими рамками, а логикой и последовательностью развития самого материала.

Ввиду довольно значительного объема имеющегося в распоряжении авторов материала, они сочли целесообразным разделить его на несколько частей. Все части объединены общей тематикой, посвященной методам расчета распространения волн через многослойные среды, а также решению некоторых характерных задач. Первая часть [1] содержит описание классических методов расчета, таких как прямой, усреднения и матрицы. Настоящая монография, являющаяся продолжением первой, посвящена описанию классического метода импеданса, ранее предложенного авторами метода исключения и исторически

первого метода переотражений. Все методы изложены в определенном авторском преломлении, объединенном единством подхода на основе модели распространения одномерных волн. Приведен ряд примеров решения конкретных задач.

Монография содержит 14 глав. Первые девять глав посвящены методу импеданса, следующие четыре — методу исключения и последняя — методу переотражений. Кратко перечислим рассматриваемые вопросы по главам.

**ПЕРВАЯ ГЛАВА** посвящена общему рассмотрению понятия импеданса для различных волновых процессов. Материал главы является вводным к последующему изложению, рассматриваемые вопросы приведены для общего ознакомления читателя с физической природой импеданса и основными методами его расчета. Рассмотрен импеданс для распространения волн тока и напряжения в длинной линии, одномерных волн в струне, гидродинамических волн в жидкости и электромагнитных волн в веществе. Приведена общая методика получения импеданса для распространения волн в различных средах.

**ВТОРАЯ ГЛАВА** посвящена введению в рассмотрение понятия обобщенного импеданса как отношения волновой функции волны к производной от этой функции по координате. Получен обобщенный импеданс для одномерных, акустических и электромагнитных волн. Рассмотрены случаи продольного и наклонного распространения волн прямого и обратного (встречного) направлений. Приведена сводная таблица импедансов для всех рассмотренных случаев.

**ТРЕТЬЯ ГЛАВА** посвящена краткому обзору основных способов применения обобщенного импеданса для решения задач о распространении волн в простых структурах. Рассмотрено распространение одномерной волны через структуру из трех сред. Приведен метод последовательного пересчета входного и выходного импедансов. Полученные результаты сравниваются с решениями тех же задач прямым методом.

**ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ** посвящена рассмотрению методом входного и выходного импедансов падения двух одномерных волн прямого и встречного направлений на структуру, содержащую произвольное число сред. Случаи от двух до пяти сред рассмотрены наиболее подробно. Приведены общие схемы пересчета импедансов и амплитуд для обоих направлений распространения волн, как от конца к началу, так и от начала к концу структуры.

**ГЛАВА ПЯТАЯ** посвящена распространению волн прямого и встречного направлений в структурах, содержащих произвольное число сред. Наряду с одномерными рассмотрены акустические и электромагнитные волны различных поляризований для случаев нормального и наклонного падения. В целом материал главы можно рассматривать как свод конечных результатов, опирающихся на данные предыдущих глав, а необходимые промежуточные выкладки любознательному читателю авторы рекомендуют выполнить в качестве полезного упражнения.

ГЛАВА ШЕСТАЯ посвящена адаптации метода обобщенного импеданса для решения практических задач. Настоящая глава является вводной для следующих трех. Здесь еще раз более последовательно и подробно, чем в предыдущих главах, рассмотрено получение обобщенного импеданса для волн обоих направлений, приведен пошаговый алгоритм пересчета импедансов и амплитуд, удобный для машинного решения, а также получены коэффициенты отражения и прохождения.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ посвящена применению метода обобщенного импеданса для решения практической задачи о распространении волны через многослойную структуру, содержащую один прямоугольный барьер. Для случая одномерных волн получены импедансы и амплитуды отраженной и проходящей волн, а также коэффициенты отражения и прохождения по энергии. Рассмотрены особенности распространения волны в случае барьера, имеющего комплексный характер, в том числе с отрицательной мнимой составляющей.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ посвящена применению метода обобщенного импеданса для решения практической задачи о распространении волны через многослойную структуру, содержащую ступенчато нарастающий барьер. Получены амплитуды волн, распространяющихся в обоих направлениях, а также коэффициенты отражения и прохождения по энергии. Рассмотрены особенности распространения волны в случае барьера, имеющего комплексный характер, в том числе в ступенчато нарастающей структуре, слои которой обладают положительной и отрицательной диссипацией.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ посвящена определению методом обобщенного импеданса корректности применения ступенчатого приближения для расчета коэффициентов отражения, прохождения и поглощения при падении волны на неоднородную структуру. На основе линейного нарастания волнового числа сформировано ступенчатое приближение неоднородности. Получено критическое значение волнового числа, определяющее корректность приближения, выше которого дальнейшее увеличение дробности структуры к повышению точности приближения не приводит.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ посвящена рассмотрению математического аппарата для принципиально отличного от импедансных нового метода расчета распространения волн через многослойные структуры, названного методом исключения. Приведена общая схема метода, состоящего в разбиении структуры на отдельные ячейки с последующим сшиванием их в единое целое на основе соответствующих граничных условий. Название метода происходит из-за последовательного исключения данных отражения и прохождения на промежуточных границах между ячейками. Рассмотрение выполнено для одномерных волн, причем сразу учитываются волны прямого и встречного направлений. Кратко приведена схема обобщения метода на случай электромагнитных волн. Материал главы является вводным для применения метода исключения

к расчету распространения волн в различных многослойных структурах, рассматриваемых в последующих главах.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ посвящена применению развитого в предыдущей главе метода исключения для решения практических задач о распространении волн в неоднородных средах. В качестве наиболее простых примеров неоднородностей выбрана линейная и квадратичная полуэллиптическая. Получены амплитуды распространяющихся волн и оценена корректность приближения плавной неоднородности ступенчатой.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ посвящена применению метода исключения для решения задач о распространении волн в средах с барьерными и периодическими неоднородностями. Получены амплитуды распространяющихся волн при различном числе, конфигурации и расположении барьеров. Определены особенности прохождения волн через образованные барьерами периодические структуры, выявлен эффект вторичной модуляции коэффициентов отражения и прохождения, оценено влияние диссипации.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ посвящена применению метода исключения для решения задач о распространении волн в средах со случайными неоднородностями. В качестве модели выбрана многослойная структура, состоящая из десяти сред, волновые числа в которых распределены случайным образом. Выявлены свойства распределения плотности амплитуд отраженных волн, обусловленные соотношением между толщиной структуры и минимальной длиной волны в ней. Показано, что разупорядочение распределения волновых чисел внутри структуры ведет к уменьшению отражения и предложен параметр, количественно характеризующий такое уменьшение.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ посвящена описанию специфического метода переотражений, предназначенного для расчета амплитуд отраженных и проходящих волн в случае, когда заранее известны локальные коэффициенты отражения и прохождения для каждой пары соседствующих слоев структуры. Для структуры из трех сред получены амплитуды внешних и внутренних волн, приведена процедура расчета локальных коэффициентов при известных волновых числах слоев структуры. Рассмотрены случаи падения волн прямого и встречного направлений, выполнено сравнение с результатами, получаемыми прямым методом.

Определенный опыт работы авторов со студентами и начинающими исследователями показывает, что при первоначальном ознакомлении с предметом заметные трудности вызывает освоение математического аппарата, значительная часть которого рассеяна в статьях, не всегда легко стыкующихся друг с другом. С целью преодоления подобного положения в начальных главах монографии приведены некоторые общие приемы работы с волновыми процессами, полезные для дальнейшего изложения. Более сложные методы расчета рассматриваются в соответствующих главах также с достаточной степенью подробности,



Решены некоторые задачи прикладного характера. Приведено множество примеров, и даны методические рекомендации, предназначенные для самостоятельной работы учащихся. Для удобства пользования монография снабжена подробным оглавлением и в конце каждой главы приведены краткие выводы.

В работах, предшествовавших написанию настоящей монографии, в первую очередь [56–106], кроме основных авторов принимали участие многочисленные соавторы. Важнейшую роль сыграло создание благоприятной атмосферы, способствующей успешному выполнению исследований. Прежде всего следует отметить коллектив кафедры радиопизики Сыктывкарского Государственного Университета, возглавляемой Л. Н. Котовым.

Первичные экспериментальные исследования распространения электромагнитных волн в тонких пленках проводились при участии С. В. Некипелова, К. Бажукова, М. Баженова, Д. С. Безносикова, О. А. Кирпичевой, Ю. Е. Калинина, А. В. Ситникова, Е. А. Голубева.

Важную роль в обсуждении работы на всех ее этапах играли многочисленные дискуссии с В. С. Власовым, Д. С. Плешевым, А. П. Ивановым, Ф. Ф. Асадуллиним.

Другой организацией, где проводились исследования, являлся Институт радиотехники и электроники РАН, в частности лаборатория магнитных исследований, возглавляемая одним из соавторов настоящей монографии В. Г. Шавровым.

Предшествовавшие работе многочисленные исследования магнитных свойств тонких пленок проводились совместно с В. И. Зубковым и Э. Г. Локком при активном участии А. В. Вашковского.

В публикациях в «Журнале радиотехники и электроники РАН» важнейшая роль принадлежала заведующему редакции А. О. Раевскому и редактору И. М. Столяровой.

За весьма оперативные многочисленные публикации в электронном «Журнале Радиоэлектроники» авторы считают приятнейшим долгом поблагодарить заведующего редакцией академика РАН В. А. Черепенина и главного редактора Е. В. Корженевскую, а также ученого секретаря редакции Д. Д. Кузнецова и технического секретаря М. С. Быбик.

Важнейшая роль в создании благоприятных условий для работы, постоянное к ней внимание и неоднократное оказание административной и научной помощи принадлежит академику РАН Ю. В. Гуляеву.

Непосредственное выполнение работы, в том числе написание настоящей монографии, оказалось возможным благодаря помощи академика РАН С. А. Никитова.

Практически все работы были выполнены с деятельным участием многочисленного технического персонала, без помощи которого выполнение приведенного труда было бы совершенно невозможным.

Всем перечисленным участникам и соавторам работ авторы выражают огромную признательность, отдают низкий поклон и приносят глубочайшую благодарность. Величайшее спасибо Вам, дорогие соратники, друзья и помощники!

## Глава 1

# ИМПЕДАНС КАК ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАЗЛИЧНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава посвящена общему рассмотрению понятия импеданса для различных волновых процессов. Материал главы является вводным к последующему изложению, рассматриваемые вопросы приведены для общего ознакомления читателя с физической природой импеданса и основными методами его расчета.

На примере активных и реактивных элементов электрической цепи введено определение импеданса как комплексного сопротивления такой цепи, исходящее из классического закона Ома. В рамках представления длинной линии как совокупности сосредоточенных элементов введено понятие импеданса для распространения волны в такой линии. Рассмотрен импеданс для случаев распространения одномерных волн в струне, гидродинамических волн в жидкости и электромагнитных волн в среде, обладающей электродинамическими параметрами. Приведена общая методика получения импеданса для распространения волн в различных средах.

В главе частично использован материал монографии [59, стр. 10–30]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 1.1. Общее понятие об импедансе

Понятие импеданса используется в различных областях науки и особенно техники, причем в каждой отрасли импеданс определяется по-разному. Так, в электротехнике импеданс определяется как активное или комплексное сопротивление цепи, в теории длинных линий — как квадратный корень из отношения погонной индуктивности к погонной емкости, в акустике как отношение давления к скорости движения среды, в электродинамике как квадратный корень из отношения магнитной и диэлектрической проницаемостей среды и так далее. В результате специалист в одной области при упоминании импеданса в другой области, плохо понимает, о чем идет речь, то есть не может свободно ориентироваться в разнообразии используемых понятий.

В классическом отношении понятие импеданса является единым, то есть имеет одни и те же исходные корни. Чтобы хоть как-то разобраться в сложившейся путанице, приведем достаточно общий подход к определению понятия импеданса.

### 1.1.1. Введение импеданса на основе закона Ома

Обще понятие импеданса базируется на классическом законе Ома [107, стр. 134–135], [108, стр. 176–179], гласящем, что ток через элемент электрической цепи прямо пропорционален напряжению на концах элемента и обратно пропорционален сопротивлению через этот элемент:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (1.1)$$

где  $I$  — ток,  $U$  — напряжение,  $R$  — сопротивление,

Выделяя из этой формулы сопротивление, получаем

$$R = \frac{U}{I}. \quad (1.2)$$

Так вот, в этом простейшем случае импеданс тождественно равен такому сопротивлению. Для удобства работы с более общим понятием импеданс обычно обозначается не буквой  $R$ , а буквой  $Z$ , то есть, если мы хотим говорить об импедансе, то закон Ома должен быть записан в виде:

$$Z = \frac{U}{I}, \quad (1.3)$$

где  $Z$  и есть импеданс.

В случае сложной цепи, состоящей из активных элементов, импеданс такой цепи рассчитывается по той же формуле (1.3), в которой для определения тока при заданном напряжении следует использовать правила Кирхгофа [107, стр. 157–163], [108, стр. 198–203].

### 1.1.2. Импеданс активных и реактивных элементов

В случае постоянного тока соотношение (1.3) является достаточно универсальным. Однако для меняющегося во времени тока так хорошо обстоит дело только в случае, если цепь целиком состоит из активных элементов, то есть обычных омических сопротивлений. При наличии в цепи с меняющимся током реактивных элементов, таких как индуктивность и емкость, пропорциональность между током и напряжением типа (1.1) принимает другой вид, учитывающий изменение тока во времени. Рассмотрим определение импеданса для всех этих случаев более подробно.

#### *Импеданс активного сопротивления*

Если через активное сопротивление  $R$  протекает ток  $I$ , то на концах сопротивления возникает падение напряжения  $U_R$ , в соответствии с законом Ома (1.1) равное

$$U_R = IR. \quad (1.4)$$

Определим импеданс такого сопротивления подобно (1.3), то есть как отношение падения напряжения к току

$$Z_R = \frac{U_R}{I}. \quad (1.5)$$

Очевидно, что

$$Z_R = R. \quad (1.6)$$

Падение напряжения на активном сопротивлении  $R$  не зависит от того, какой протекает через него ток, постоянный или меняющийся во времени, так что в любом случае импеданс активного сопротивления определяется выражением (1.6). Например, если ток меняется во времени по синусоидальному закону, то есть

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad (1.7)$$

то падение напряжения на сопротивлении, в соответствии с активным характером последнего, меняется прямо пропорционально току, так что импеданс сохраняет свой вид (1.6)

$$Z_R = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i\omega t}} = R. \quad (1.8)$$

### **Импеданс индуктивности**

В случае если меняющийся во времени ток проходит через индуктивность  $L$ , на ней возникает ЭДС самоиндукции [107, стр. 220, форм. (105.2)]:

$$E_L = -L \frac{dI}{dt}, \quad (1.9)$$

где  $L$  — величина индуктивности.

Эта ЭДС мешает изменению тока, поэтому на концах индуктивности возникает напряжение противоположного знака:

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (1.10)$$

В результате индуктивность оказывает току сопротивление, по закону Ома (1.2) равное

$$R_L = \frac{U_L}{I} = L \frac{dI/dt}{I}. \quad (1.11)$$

Будем называть эту величину импедансом индуктивности, то есть

$$Z_L = \frac{U_L}{I} = L \frac{dI/dt}{I}. \quad (1.12)$$

Если ток меняется по синусоидальному закону, то есть

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad (1.13)$$

то (1.12) принимает вид:

$$Z_L = i\omega L. \quad (1.14)$$

**Импеданс емкости**

В случае, если меняющийся во времени ток проходит через емкость  $C$ , то такой ток удобно представить в виде производной от меняющегося во времени заряда  $Q$  [107, стр. 125, форм. (59.2)]:

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (1.15)$$

где заряд связан с напряжением соотношением [107, стр. 78, форм. (35.1)]

$$Q = CU_C, \quad (1.16)$$

где  $U_C$  — падение напряжения на емкости.

Из (1.16) следует:

$$U_C = \frac{Q}{C}. \quad (1.17)$$

Таким образом, согласно закону Ома (1.2), емкость оказывает току сопротивление, равное

$$R_C = \frac{U_C}{I} = \frac{1}{C} \cdot \frac{Q}{dQ/dt}. \quad (1.18)$$

Будем называть эту величину импедансом емкости, то есть

$$Z_C = \frac{U_C}{I} = \frac{1}{C} \cdot \frac{Q}{dQ/dt}. \quad (1.19)$$

Если заряд меняется во времени по синусоидальному закону, то есть

$$Q = Q_0 e^{i\omega t}, \quad (1.20)$$

то (1.19) принимает вид

$$Z_C = -i \frac{1}{\omega C}. \quad (1.21)$$

## 1.2. Импеданс цепи с последовательным соединением активных и реактивных элементов

Рассмотрим теперь цепь с последовательно соединенными рассмотренными выше тремя элементами: активным сопротивлением  $R$ , индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$ , показанную на рис. 1.1.

К конечным точкам цепи А и В приложено напряжение  $U_S$ , в результате чего по всем элементам цепи протекает общий ток  $I_S$ .

Напряжения на элементах цепи равны  $U_R$  (1.4),  $U_L$  (1.10),  $U_C$  (1.17), так что выполняется соотношение

$$U_S = U_R + U_L + U_C. \quad (1.22)$$

При этом импеданс полной цепи, в соответствии с законом Ома (1.3), получается равным

$$Z = \frac{U_S}{I_S} = \frac{U_R}{I_S} + \frac{U_L}{I_S} + \frac{U_C}{I_S} = Z_R + Z_L + Z_C, \quad (1.23)$$

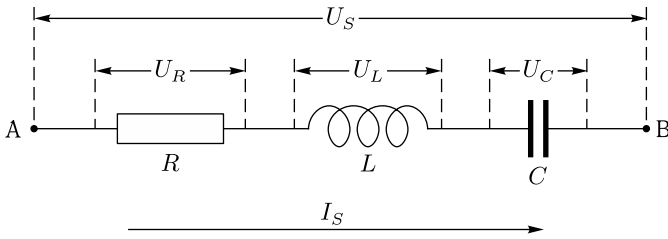


Рис. 1.1. Цепь с последовательным соединением активного сопротивления, индуктивности и емкости

где входящие в это выражение импедансы определяются формулами (1.8), (1.12), (1.19).

Для синусоидального приложенного напряжения и, соответственно, синусоидального тока, импедансы  $Z_R$ ,  $Z_L$ ,  $Z_C$  определяются формулами (1.8), (1.14), (1.21). В этом случае импеданс цепи в целом определяется выражением [108, стр. 573, форм. (129.2)]

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right), \quad (1.24)$$

где  $R$  — активное сопротивление цепи,  $L$  — входящая в эту цепь индуктивность,  $C$  — входящая в цепь емкость.

Для определения импеданса сложной цепи, содержащей реактивные элементы, импеданс также может быть определен с помощью правил Кирхгофа для переменных токов с использованием комплексных сопротивлений реактивных элементов [108, стр. 587–583], [107, стр. 572–577].

### 1.2.1. Замечание об общности выражений для импедансов реактивных элементов

Из проделанного рассмотрения можно видеть, что импеданс для индуктивности определяется выражением (1.12) импеданс для емкости — выражением (1.19), то есть в обоих случаях имеет место соотношение между самой величиной и производной от этой величины по времени. В случае индуктивности такой величиной является ток, и импеданс с точностью до постоянного коэффициента равен отношению производной от тока к самому этому току. В случае емкости такой величиной является заряд и импеданс определяется в обратном порядке — отношением заряда к производной от этого заряда. Как будет видно из дальнейшего рассмотрения, такое выражение импеданса через отношение определенной величины к производной от этой величины и обратно, является довольно общим и присутствует в самых разнообразных определениях импеданса.

Кроме понятия «импеданс», соответствующего сопротивлению, иногда используется понятие «адмиттанса», соответствующее проводимости,

то есть величине, обратной сопротивлению. При этом адмиттанс индуктивности, согласно (1.11), получается равным

$$A_L = \frac{1}{R_L} = \frac{1}{L} \cdot \frac{I}{dI/dt}, \quad (1.25)$$

а адмиттанс емкости, согласно (1.13), равным

$$A_C = \frac{1}{R_C} = C \cdot \frac{dQ/dt}{Q}. \quad (1.26)$$

Можно видеть, что здесь в обоих случаях опять присутствует производная и сама величина в отношении, обратном понятию импеданса.

В силу того, что адмиттанс является величиной, обратной импедансу, выполняются очевидные соотношения:

$$A_L Z_L = A_C Z_C = 1. \quad (1.27)$$

**Замечание.** Практика показывает, что выражение «адмиттанс» является довольно малоупотребительным, однако ввиду частого использования величины, обратной импедансу, для обозначения такой величины вместо выражения «адмиттанс» часто используется эквивалентное выражение «комплексная проводимость».

### 1.3. Волновой процесс и импеданс в двухпроводной линии

Выполненное до сих пор рассмотрение касалось только цепей с сосредоточенными элементами. Однако главное применение понятия импеданса касается в первую очередь цепей с распределенными параметрами, в электродинамике представленных, например, двухпроводными и коаксиальными линиями или волноводами. Сосредоточенные элементы также могут входить в подобные конструкции, однако главной особенностью здесь являются все же параметры, распределенные по некоторой длине или объему.

В качестве примера цепи с распределенными параметрами рассмотрим двухпроводную линию [109, стр. 210–217], схема которой показана на рис. 1.2.

В конструктивном отношении (рис. 1.2 *a*) такая линия представляет собой два линейных параллельно расположенных проводника АВ и CD, пространство между которыми заполнено диэлектриком, в простейшем случае роль которого играет воздух.

Линия используется для передачи электрических сигналов на расстояние, соизмеримое или значительно превышающее длину волны, соответствующую этому сигналу, при условии, что поперечные размеры линии, такие как толщина проводников и расстояние между ними, значительно меньше той же длины волны.

В таком приближении линию можно рассматривать как состоящую из последовательно соединенных отрезков единичной длины, каждый

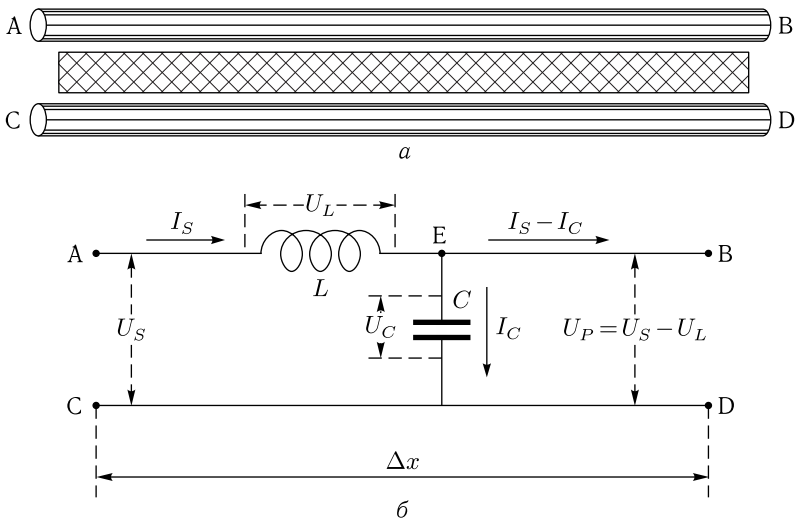


Рис. 1.2. Схема введения импеданса для двухпроводной линии без потерь: а — конструктивное выполнение двухпроводной линии; б — электрическая схема отрезка линии с сосредоточенными параметрами.

из которых можно охарактеризовать сосредоточенными параметрами, относя их величины к длине такого отрезка. То есть будем считать, что по длине линии распределены удельные («погонные») реактивные параметры — удельная емкость  $C_0$  и удельная индуктивность  $L_0$ , а также активные параметры — удельное сопротивление  $R_0$  и удельное сопротивление утечки  $G_0$ . Роль индуктивности при этом играют проводники линии, роль емкости — расстояние между ними, роль активного сопротивления — сопротивление проводников линии, а роль удельной утечки — электрическое сопротивление между проводниками линии.

Для простоты сначала рассмотрим линию без потерь, то есть такую, для которой удельное сопротивление и удельная утечка отсутствует. Эквивалентная электрическая схема единичного отрезка такой линии показана на рис. 1.2, б.

Нижний проводник линии CD предполагается заземленным, так что активным является проводное AB. Входной конец отрезка линии — точки A и C, выходной — точки B и D. Отрезок линии содержит сосредоточенную индуктивность  $L$  и сосредоточенную емкость  $C$ , соединенные по схеме, показанной на рисунке.

Полагая длину изображенного на рисунке отрезка линии равной  $\Delta x$ , получаем, что

$$L = L_0 \Delta x; \quad (1.28)$$

$$C = C_0 \Delta x, \quad (1.29)$$

где  $L_0$  и  $C_0$  — индуктивность и емкость на единицу длины.



На линию слева в точку А поступает сигнал, напряжение которого равно  $U_S$ . При этом от точки А до точки Е, то есть через индуктивность  $L$  идет ток  $I_S$ , который далее разветвляется на два тока:  $I_C$  через емкость  $C$  на землю и  $I_S - I_C$  на выход линии. Ток  $I_S$  создает на индуктивности  $L$  падение напряжения  $U_L$ . Ток  $I_C$  на емкости  $C$  создает падение напряжения  $U_C$ . На выходе линии возникает напряжение  $U_P$ . Можно видеть, что

$$U_P = U_S - U_L = U_C. \quad (1.30)$$

На выходе рассматриваемого отрезка линии длиной  $\Delta x$  напряжение уменьшается на величину падения напряжения на индуктивности  $L$ , то есть, подобно (1.10), получаем:

$$\Delta U = -L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (1.31)$$

где знак минус соответствует уменьшению напряжения на выходе отрезка линии.

На выходе того же отрезка ток уменьшается на величину ответвления тока в емкость  $C$ , то есть, подобно (1.15) с учетом (1.16), получаем:

$$\Delta I = -C \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (1.32)$$

где знак минус также соответствует уменьшению тока на выходе отрезка линии.

Заметим, что в выражении (1.31) участвует напряжение  $U_L$  и ток  $I_S$ , а в выражении (1.32) — напряжение  $U_C$  и ток  $I_C$ . Однако полагая, что в фиксированный момент времени напряжение  $U_S$  и ток  $I_S$  можно считать константами, тогда как (1.31) и (1.32) относятся к приращению, то получаем, что приращения напряжения и тока, участвующие в выражениях (1.31) и (1.32) — одни и те же, так что индексы можно опустить и считать эти приращения величины равными.

Представляя индуктивность и емкость в виде (1.28) и (1.29), из (1.31) и (1.32) получаем:

$$\Delta U = -L_0 \Delta x \frac{\partial I}{\partial t}; \quad (1.33)$$

$$\Delta I = -C_0 \Delta x \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (1.34)$$

Разделяя оба эти соотношения на  $\Delta x$  и переходя к бесконечно малым, получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}; \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (1.36)$$

Это — система уравнений, связывающая ток и напряжение в длинной линии.

Покажем, что полученная система уравнений описывает распространение волны тока или напряжения вдоль линии.

Перепишем (1.35) и (1.36) так, чтобы в левых частях оставались производные только от напряжения:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}; \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{C_0} \frac{\partial I}{\partial x}. \quad (1.38)$$

Дифференцируя (1.37) по  $t$  и (1.38) по  $x$ , после чего приравнявая смешанные производные и перенося все слагаемые в левую часть, получаем уравнение для тока:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{1}{L_0 C_0} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0. \quad (1.39)$$

Аналогично, переписывая (1.35) и (1.36) так, чтобы в левых частях оставались производные только от тока, после чего выполняя дифференцирование первого уравнения по  $x$ , а второго по  $t$  и приравнявая смешанные производные, получаем уравнение для напряжения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{L_0 C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (1.40)$$

Видно, что оба эти уравнения совпадают с точностью замены  $I$  на  $U$  и обратно, а также имеют форму классического уравнения волнового типа [54, стр. 26], [26, стр. 66, форм. (4.20)]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1.41)$$

где фазовая скорость волны  $a$  определяется соотношением

$$a = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (1.42)$$

Таким образом, в линии может распространяться гармоническая волна, напряжение и ток в которой, с точностью до фазы, имеют вид

$$U = U_0 e^{i(\omega t - kx)}; \quad (1.43)$$

$$I = I_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (1.44)$$

Определим сначала импеданс  $Z$  в соответствии с законом Ома (1.3). То есть как отношение напряжения волны к току в той же волне. При этом, с точностью до фазы между током и напряжением, получаем:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0}. \quad (1.45)$$

Найдем выражение для импеданса через параметры линии. Для этого подставим (1.43) и (1.44) в (1.35) и (1.36), в результате чего получаем:

$$-ikU_0 = -L_0i\omega I_0; \quad (1.46)$$

$$-ikI_0 = -C_0i\omega U_0 - ikI_0 = -C_0i\omega U_0. \quad (1.47)$$

Разделяя первое выражение на второе и выделяя отношение  $U_0/I_0$ , получаем:

$$\left(\frac{U_0}{I_0}\right)^2 = \frac{L_0}{C_0}. \quad (1.48)$$

Определим теперь импеданс  $Z_0$  как отношение амплитуды напряжения волны  $U_0$  к амплитуде тока  $I_0$  той же волны. При этом, в соответствии с (1.45), получаем:

$$Z_0 = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (1.49)$$

Это — классическое выражение для импеданса длинной линии, традиционно именуемое ее «волновым сопротивлением» [109, стр. 217].

### 1.3.1. Импеданс двухпроводной линии с потерями

Приведем еще один пример вычисления импеданса, имеющий большое значение для практики. В разделе 1.3 рассмотрена двухпроводная линия в идеальном варианте, содержащая только реактивные элементы. В то же время, используемые в практической работе материалы для линий всегда несут с собой определенные потери. Так, провода линии обладают активным сопротивлением, а изоляция между проводами всегда имеет некоторую проводимость, дающую утечку. Для того чтобы учесть эти факторы в выражение (1.31) следует ввести последовательно включенное с индуктивностью активное сопротивление  $R$ , а в выражение (1.32) параллельно включенное с емкостью сопротивление утечки  $G$ . Таким образом, эти выражения принимают вид:

$$\Delta U = -RI - L\frac{\partial I}{\partial t}; \quad (1.50)$$

$$\Delta I = -GU - C\frac{\partial U}{\partial t}. \quad (1.51)$$

Знаки в этих выражениях, как и ранее, определяются тем, что введение сопротивления  $R$  последовательно с индуктивностью  $L$  уменьшает выходное напряжение линии, а включение проводящего элемента  $G$  параллельно емкости  $C$  увеличивает суммарный ток через емкость и этот элемент  $G$ , так что выходное напряжение линии опять падает.

Введение удельных параметров, подобно (1.28), (1.29), дает выражения:

$$L = L_0\Delta x; \quad (1.52)$$

$$C = C_0\Delta x; \quad (1.53)$$

$$R = R_0\Delta x; \quad (1.54)$$

$$G = G_0\Delta x. \quad (1.55)$$

Подставляя (1.52)–(1.55) в (1.50)–(1.51) и подобно (1.35), (1.36) переходя к дифференциалам, получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -R_0 I - L_0 \frac{\partial I}{\partial t}; \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -G_0 U - C_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (1.57)$$

Это — так называемые «телеграфные уравнения»: [54, стр. 31, форм. (21)], широко используемые в технике длинных линий. При этом конкретные величины активных и реактивных параметров определяются геометрическим размерами и материалом проводников линии.

Положим напряжение и ток в виде гармонических волн (1.43), (1.44)

$$U = U_0 e^{i(\omega t - kx)}; \quad (1.58)$$

$$I = I_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (1.59)$$

Подставляя эти выражения в (1.56)–(1.57) и выделяя отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока, получаем импеданс в виде [110, стр. 230, форм. (7.3)]:

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{R_0 + i\omega L_0}{G_0 + i\omega C_0}}. \quad (1.60)$$

В соответствии со сложившейся традицией, полученный таким образом импеданс часто именуется «волновым сопротивлением линии» [110, стр. 230].

Разделяя числитель подкоренной дроби на  $L_0$ , знаменатель на  $C_0$  и вынося  $L_0/C_0$  за знак корня, приведем выражение для импеданса (1.60) к форме, удобной для решения некоторых задач:

$$Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{\frac{\frac{R_0}{L_0} + i\omega}{\frac{G_0}{C_0} + i\omega}} = Z_0 \sqrt{\frac{\frac{R_0}{L_0} + i\omega}{\frac{G_0}{C_0} + i\omega}}, \quad (1.61)$$

где для  $Z_0$  использована формула (1.49).

На практике в достаточно хороших линиях удельное сопротивление и проводимость крайне малы, так что в пределе выражения (1.60) и (1.61) переходят в (1.49).

**Замечание.** В некоторой литературе, например в [111, стр. 208, форм. (7.20)], формула (1.60) записывается в другом виде:

$$Z = \sqrt{\frac{R_0 - i\omega L_0}{G_0 - i\omega C_0}}. \quad (1.62)$$

Такое разночтение обусловлено тем, что гармоническая зависимость от времени может быть представлена в двух видах:  $e^{i\omega t}$  и  $e^{-i\omega t}$ . В рамках настоящей монографии везде зависимость от времени представляется только в первом виде, то есть  $e^{i\omega t}$ . Такой же выбор используется

в книге [110]. В книге [111] используется второй вид, то есть  $e^{-i\omega t}$ . В конечных результатах, не содержащих мнимости, выбор той или иной формы зависимости от времени безразличен и при условии сохранения знака волнового числа может определять только положительное или отрицательное направление распространения волны. Однако в присутствии мнимости такой выбор имеет принципиальное значение, в ряде случаев приводящее к изменению знаков, как это получилось в формуле (1.62). Некоторые особенности того или иного выбора отмечены в [111, стр. 7]. Более подробная трактовка использования того или другого знака показателя экспоненты применительно к методу комплексных амплитуд приведена в [26, стр. 88–89].

Из системы уравнений первого порядка (1.56) и (1.57) можно получить волновое уравнение второго порядка. Для этого, подобно тому, как это было сделано при выводе (1.39) то есть дифференцируя (1.56) по  $t$  и дифференцируя полученное из (1.57) выражение  $\partial U/\partial t$  по  $x$ , после чего приравнивая смешанные производные, а также повторно используя (1.56), получаем уравнение для тока  $I$  в виде:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{1}{L_0 C_0} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \left( \frac{R_0}{L_0} + \frac{G_0}{C_0} \right) \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{R_0 G_0}{L_0 C_0} I = 0. \quad (1.63)$$

Аналогично, дифференцируя (1.57) по  $t$  и дифференцируя полученное из (1.56) выражение  $\partial I/\partial t$  по  $x$ , после чего приравнивая смешанные производные, а также повторно используя (1.57), получаем уравнение для напряжения  $U$  в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{L_0 C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left( \frac{R_0}{L_0} + \frac{G_0}{C_0} \right) \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{R_0 G_0}{L_0 C_0} U = 0. \quad (1.64)$$

Можно видеть, что оба эти уравнения совпадают с точностью до замены  $U$  на  $I$  и обратно. Первые два слагаемые в совокупности представляют собой классическое волновое уравнение без затухания, подобное (1.39), (1.40), причем коэффициент перед вторым слагаемым, соответствующий фазовой скорости волны без затухания  $a$ , по-прежнему определяется формулой (1.42). Третье слагаемое соответствует волновому уравнению с затуханием по времени, способ и вид традиционного решения которого методом разделения переменных можно найти в [26, стр. 67–69, форм. (4.20), (4.21)]. Последнее слагаемое содержит переменную в исходном виде  $I$  или  $U$ , которые в классическом варианте отсутствуют. Однако решение такого уравнения методом разделения переменных вполне возможно, в чем любознательный читатель может убедиться непосредственно в качестве полезного упражнения.

### 1.3.2. Общность понятия длинной линии

В предыдущих разделах рассмотрена двухпроводная линия, состоящая из двух параллельных проводников, разделенных небольшим расстоянием (рис. 1.2, а). Главным моментом для правомерности рассмотрения явилось предположение о том, что длина линии значи-

тельно больше расстояния между проводниками и толщины самих проводников, причем толщина проводников и расстояние между ними могут быть величинами одного порядка. Это предположение позволило ввести распределенные («погонные») параметры — удельную емкость и удельную индуктивность линии. Следует заметить, что описанная конструкция линии, отвечающая указанным предположениям, является далеко не единственной. Во-первых, проводники могут быть не цилиндрическими, а другого, например квадратного или прямоугольного сечения. Далее, таким же условиям удовлетворяет коаксиальная линия, состоящая из тонкого цилиндрического проводника, окруженного достаточно широкой цилиндрической оболочкой, а также полосковая линия, содержащая тонкий проводник, расположенный над широкой проводящей плоскостью.

Некоторые примеры конструктивного выполнения линий, а также поля и погонные параметры можно найти в [112]. Так, емкость двухпроводной линии приведена в [112, стр. 49–50, форм. (2.26)], индуктивность той же линии в [112, стр. 49–50, форм. (2.26)], емкость коаксиального кабеля — в [112, стр. 58–59, форм. (2.42)], индуктивность того же кабеля — в [112, стр. 161–164, форм. на стр. 164 без номера]. Возможны и другие варианты конструктивного выполнения линии, причем всегда длина линии должна значительно превышать расстояние между проводниками. Поэтому для таких линий часто используется собирательное название «длинные линии», без точного обращения к конкретной конструкции.

Относительно волновых процессов в таких линиях важнейшим условием возможности введения распределенных параметров является требование, чтобы длина волны была значительно больше поперечных размеров линии. В противном случае необходимо учитывать неоднородность распределения полей по поперечному сечению линии, при котором распространение волны принимает волной характер. Более подробно сопоставление характера распространения волн в волноводах и длинных линиях рассмотрено в [109, стр. 295–298].

## 1.4. Волновое уравнение для гибкой струны

Наряду с теорией электрических цепей понятие импеданса имеет важнейшее практическое значение для многих других волновых процессов. Простым примером одного из таких процессов является распространение волны в гибкой струне. Такая волна описывается одной пространственной переменной, то есть имеет одно измерение, поэтому ее можно назвать «одномерной».

Для создания определенной базы, на которую далее будет опираться понятие импеданса, приведем вывод волнового уравнения для одномерной волны на примере волны в струне [54, стр. 23–27], [59, стр. 13–16]. Геометрия задачи схематически показана на рис. 1.3. Здесь в левом верхнем и правом нижнем углах показаны различные возможные

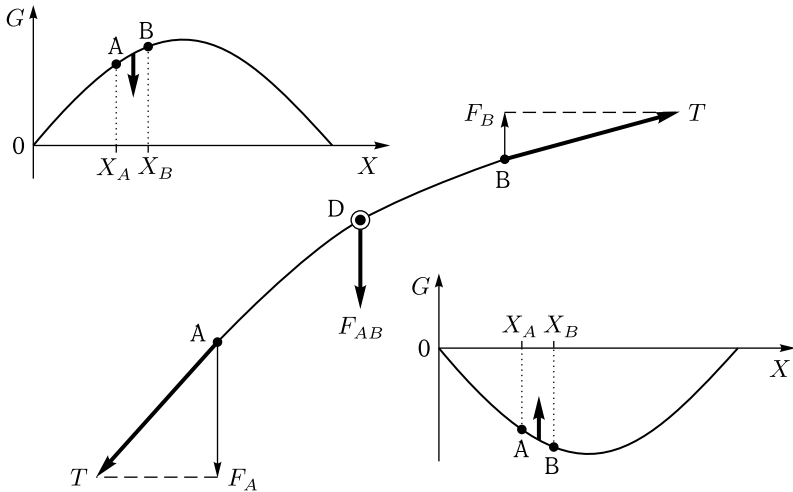


Рис. 1.3. Геометрия колебаний струны

положения струны при колебаниях на первой моде. Отклонение струны от положения равновесия при координате  $x$  обозначено через  $G$ . Посередине в крупном масштабе показан малый отрезок струны между точками А и В и действующие на него силы. Здесь  $T$  — сила натяжения струны, постоянная по всей ее длине. Компоненты этой силы вдоль оси  $Ox$  взаимно уравниваются. Сила, действующая на отрезок АВ перпендикулярно оси  $Ox$ , складывается из двух сил:  $F_A$ , приложенной в точке А и  $F_B$ , приложенной в точке В.

Так как силы натяжения  $T$  действуют по касательным к профилю струны  $G(x)$ , то, учитывая геометрическое определение производной как тангенса угла касательной к кривой, а также считая отклонения струны от положения равновесия столь малыми, что тангенс угла отклонения можно приближенно считать равным синусу того же угла, получаем, что силы  $F_A$  и  $F_B$  равны:

$$F_A = T \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=x_A}; \quad (1.65)$$

$$F_B = -T \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=x_B}. \quad (1.66)$$

Результирующая сила  $F$ , которую приближенно можно считать приложенной в точке D, соответственно равна:

$$F_{AB} = F_A + F_B = T \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=x_A} - T \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=x_B}. \quad (1.67)$$

Под действием этой силы участок струны АВ движется с ускорением:

$$a_{AB} = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}. \quad (1.68)$$

Обозначая линейную плотность материала струны через  $\rho$ , можно полагать, что масса участка АВ равна:

$$m_{AB} = \rho(x_B - x_A). \quad (1.69)$$

Согласно второму закону Ньютона должно выполняться равенство

$$a_{AB} m_{AB} = F_{AB}, \quad (1.70)$$

раскрывая которое, получаем:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \rho(x_B - x_A) = T \left( \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=x_A} - \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=x_B} \right). \quad (1.71)$$

Записывая то же равенство в виде

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=x_A} - \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=x_B}}{x_B - x_A} \quad (1.72)$$

и переходя к пределу при  $x_B - x_A \rightarrow 0$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}. \quad (1.73)$$

Вводя обозначение

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (1.74)$$

получаем волновое уравнение для одномерной волны в его классическом виде [54, стр. 26, форм. (5)]:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad (1.75)$$

где  $G$  — волновая функция, равная смещению (отклонению) струны от положения равновесия,  $a$  — фазовая скорость волны.

В некоторых случаях это уравнение удобно записать в однородном виде:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad (1.76)$$

полностью эквивалентном (1.41), (1.75).

Заметим, что выбор в качестве переменной для описания волнового процесса смещения элемента струны  $G$  является не единственным. Так, дифференцируя (1.76) по  $t$  и учитывая независимость величины смешанной производной от порядка дифференцирования, получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial G}{\partial t} \right) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial G}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.77)$$



Вводя в качестве новой переменной скорость смещения элемента струны

$$Q = \frac{\partial G}{\partial t}, \quad (1.78)$$

получаем:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0, \quad (1.79)$$

то есть то же уравнение, что (1.76). Таким образом, скорость смещения элемента струны имеет тот же волновой характер, что и смещение этого элемента.

#### 1.4.1. Замечание о жесткой струне

Приведенный в разделе 1.4 вывод уравнения колебаний струны (1.76) предполагает струну абсолютно гибкой, то есть не сопротивляющейся изгибу [54, стр. 23]. Однако в практическом плане большинство реальных струн (в том числе музыкальных инструментов) обладает определенной жесткостью. Уравнение колебаний для жесткой струны содержит третью производную от смещения по координате, так что имеет вид [113, стр. 447, форм. (8.98)]

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - p \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + r \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} = 0, \quad (1.80)$$

где  $p$  и  $r$  определяются выражениями:

$$p = \frac{T_0}{\rho}; \quad (1.81)$$

$$r = \frac{P_0}{\rho}, \quad (1.82)$$

в которых  $T_0$  — сила натяжения струны (обозначавшаяся ранее без индекса, то есть через  $T$ ),  $P_0$  — сила сопротивления струны изгибу, а  $\rho$  — плотность материала струны.

Более подробно колебания жесткой струны рассмотрены в работе [113, раздел 8.4, стр. 440–457]. В той же работе [113, стр. 457–466] модель жесткой струны применена для колебаний спиновой цепочки, позволяющей описать возбуждение стоячих обменных волн в тонкой пленке [114] без привлечения искусственно введенной в работе [115] модели поверхностной анизотропии.

Возможность и процедура получения импеданса для этого случая авторам настоящей работы не известна, так что может составить предмет самостоятельного изыска для любознательного читателя.

### 1.5. Общее определение импеданса из волнового уравнения

В предыдущих разделах 1.3 и 1.4 рассмотрены два вида волновых процессов — волны тока  $I$  и напряжения  $U$  в длинной линии и волны

смещения  $G$  и скорости  $Q$  колебаний струны. В обоих случаях были получены волновые уравнения второго порядка: для тока (1.39), напряжения (1.40), для смещения (1.76) и скорости смещения (1.79).

В разделе 1.3.1 импеданс (1.49) получен на основе двух уравнений первого порядка (1.35) и (1.36), связывающих электрические переменные — напряжение  $U$  и ток  $I$ . В то же время распространение волны описывается волновым уравнением второго порядка (1.39) или (1.40), так что и импеданс должен получаться из подобного же волнового уравнения. Приведем здесь более или менее общий прием, позволяющий получить импеданс на основе волнового уравнения второго порядка.

Будем исходить из общего волнового уравнения (1.41), которое запишем для символической переменной  $G$  (не путать с удельной утечкой, разделы 1.3, 1.3.1, а также со смещением струны, разделы 1.4, 1.4.1). Таким образом обобщающее волновое уравнение будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0. \quad (1.83)$$

Решение этого уравнения имеет волновой характер:

$$G = G_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (1.84)$$

причем скорость  $a$  в уравнении (1.83) связана с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  соотношением

$$a = \frac{\omega}{k}. \quad (1.85)$$

Введем новые переменные:

$$u = \xi \frac{\partial G}{\partial t}; \quad (1.86)$$

$$v = -\frac{\partial G}{\partial x}, \quad (1.87)$$

где  $\xi$  — параметр нормировки, явный вид которого определяется условиями конкретной задачи. Путем прямой подстановки можно убедиться, что эти переменные также удовлетворяют исходному уравнению (1.83).

Выразим из (1.86) производную  $\frac{\partial G}{\partial t}$  и из (1.87) производную  $\frac{\partial G}{\partial x}$ , после чего продифференцируем первую по  $x$ , а вторую по  $t$  и приравняем полученные смешанные производные. Кроме этого подставим обе производные  $\frac{\partial G}{\partial t}$  и  $\frac{\partial G}{\partial x}$  в (1.83). Выполнение обоих этих преобразований позволяет получить систему:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\xi \frac{\partial v}{\partial t}; \quad (1.88)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\xi a^2} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.89)$$

Эта система по форме совпадает с (1.35)–(1.36) для двухпроводной линии, причем роль напряжения  $U$  здесь играет переменная  $u$ , а роль тока  $I$  переменная  $v$ . Можно убедиться также, что каждая из переменных  $u$  и  $v$  удовлетворяет волновому уравнению (1.83), то есть имеют волновой характер типа (1.84). Поэтому, аналогично импедансу для двухпроводной линии (1.21), можно ввести импеданс как отношение переменных  $u$  и  $v$  в виде:

$$Z = \frac{u}{v}. \quad (1.90)$$

Подставляя в эту формулу (1.86) и (1.87) получаем для импеданса наиболее общее определение:

$$Z = -\xi \frac{\frac{\partial G}{\partial t}}{\frac{\partial G}{\partial x}}. \quad (1.91)$$

В этом выражении переменная  $G$  является решением волнового уравнения (1.83), а параметр  $\xi$  должен быть определен из условий конкретной задачи. Если этот параметр известен, то, учитывая волновой характер (1.84) функции  $G$ , а также определение скорости волны  $a$  в соответствии с формулой (1.85), из (1.91) получаем:

$$Z = -\xi \frac{\frac{\partial G}{\partial t}}{\frac{\partial G}{\partial x}} = \xi \frac{\omega}{k} = \xi a. \quad (1.92)$$

В случае если импеданс определен каким-то независимым способом, формула (1.92) позволяет найти параметр  $\xi$ :

$$\xi = \frac{Z}{a}. \quad (1.93)$$

При этом переменные  $u$  и  $v$ , в соответствии с (1.86), (1.87), принимают вид:

$$u = \frac{Z}{a} \frac{\partial G}{\partial t}; \quad (1.94)$$

$$v = -\frac{\partial G}{\partial x}. \quad (1.95)$$

Для определения импеданса приведем еще две формулы, которые могут быть удобными при решении конкретных задач. Так, учитывая (1.84) и раскрывая в числителе формулы (1.91) производную по времени, получаем:

$$Z = -i\omega\xi \frac{G}{\partial G / \partial x}. \quad (1.96)$$

Раскрывая в знаменателе той же формулы (1.91) производную по координате, получаем:

$$Z = -i \frac{\xi}{k} \frac{\partial G / \partial t}{G}. \quad (1.97)$$

Таким образом, импеданс может быть выражен через частное от деления волновой функции на производную от этой функции по координате или через частное от деления производной по времени от волновой функции на саму эту функцию. Коэффициент при такой дроби будет определяться конкретными условиями задачи.

Заметим, что здесь получен импеданс, исходя из полного волнового уравнения второго порядка (1.83). Такое получение удобно в том случае, если решение конкретной задачи дает сразу такое уравнение, как это имеет место в случае колебаний струны (раздел 1.4). Однако решение задачи для длинной линии приводит к системе двух уравнений первого порядка (1.35)–(1.36), которые далее позволяют получить уравнение второго порядка (1.39) или (1.40). Общий вид этих уравнений соответствует (1.88)–(1.89). В этом случае, переходя от переменных  $u$  и  $v$  к исходной функции  $G$ , что можно сделать, используя их определения (1.86) и (1.87), можно получить определения импеданса вида (1.96), (1.97). Однако, как может убедиться любознательный читатель, такие определения будут включать в себя интегралы от функций  $u$  и  $v$ , что не всегда удобно. В то же время, совместное использование двух уравнений системы (1.88)–(1.89) позволяет получить полезные определения импеданса непосредственно через функции  $u$  и  $v$ .

Так, из (1.88), учитывая гармоническую зависимость переменных от времени, получаем:

$$v = \frac{i}{\omega\xi} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.98)$$

Используя определение импеданса в виде (1.90), получаем:

$$Z = -i\omega\xi \frac{u}{\partial u / \partial x}. \quad (1.99)$$

Аналогично, из (1.89), учитывая гармоническую зависимость от времени, получаем:

$$u = i \frac{\xi a^2}{\omega} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.100)$$

Используя определение импеданса в виде (1.90), получаем:

$$Z = i \frac{\xi a^2}{\omega} \frac{\partial v / \partial x}{v}. \quad (1.101)$$

### 1.5.1. Определение параметра нормировки для длинной линии

В разделе 1.5 введено общее определение импеданса (1.91), в которое входит нормирующий параметр  $\xi$ , определяемый условиями конкретной задачи. Приведем определение этого параметра для случая длинной линии, рассмотренной в разделе 1.3, где импеданс получен непосредственно из закона Ома.

Согласно решению задачи для уравнений (1.46)–(1.47) (раздел 1.3), импеданс длиной линии без потерь определяется соотношением (1.49), то есть

$$Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (1.102)$$

Подставляя в (1.93) выражение (1.102), а также учитывая для скорости волны выражение (1.42), получаем параметр нормировки  $\xi$  в виде:

$$\xi = \frac{Z}{a} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \bigg/ \left( \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \right) = L_0. \quad (1.103)$$

Таким образом, замена переменных (1.86)–(1.87) приобретает вид:

$$u = L_0 \frac{\partial G}{\partial t}; \quad (1.104)$$

$$v = -\frac{\partial G}{\partial x}. \quad (1.105)$$

Приведем еще две формулы, которые в некоторых случаях могут быть удобными при вычислении импедансов. Так, подобно (1.91), получаем:

$$Z = -L_0 \frac{\frac{\partial G}{\partial t}}{\frac{\partial G}{\partial x}}. \quad (1.106)$$

Раскрывая в числителе этой формулы производную по времени, получаем:

$$Z = -i\omega L_0 \frac{G}{\partial G / \partial x}. \quad (1.107)$$

Аналогично, раскрывая в знаменателе формулы (1.106) производную по координате, получаем:

$$Z = -i \frac{L_0}{k} \frac{\partial G / \partial t}{G} = -i \frac{L_0 a}{\omega} \frac{\partial G / \partial t}{G}. \quad (1.108)$$

Эти формулы являются аналогами (1.96), (1.97) для случая двухпроводной линии.

### 1.5.2. Замечание о выборе переменных

Выбор переменных (1.86)–(1.87) для представления единого волнового уравнения второго порядка (1.83) в виде двух уравнений первого порядка (1.86)–(1.87), не является единственно возможным. Например, можно ввести новые переменные в виде:

$$u = \frac{\partial G}{\partial t}; \quad (1.109)$$

$$v = -\eta \frac{\partial G}{\partial x}. \quad (1.110)$$

Из этого следует:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = u, \quad (1.111)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{\eta}v. \quad (1.112)$$

При этом, действуя аналогично выводу уравнений (1.88)–(1.89), получаем систему:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (1.113)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\eta}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.114)$$

Эта система по форме совпадает с (1.88)–(1.89) с точностью до замены  $\xi$  на  $1/\eta$ , то есть обе системы являются эквивалентными. Аналогично для вновь введенных переменных (1.109)–(1.110) можно получить волновые уравнения, подобные (1.83). Импеданс будет определяться той же формулой (1.92) с заменой  $\xi$  на  $1/\eta$ :

$$Z = \frac{a}{\eta}, \quad (1.115)$$

а для параметра  $\eta$  получается формула

$$\eta = aZ. \quad (1.116)$$

Таким образом, параметр  $\eta$  есть произведение скорости волны на ее импеданс. При этом замены переменных вида (1.86)–(1.87) и (1.109)–(1.110) являются эквивалентными с точностью замены  $\xi$  на  $1/\eta$ .

Из сделанного рассмотрения следует, что главными компонентами при задании новых переменных в виде (1.86)–(1.87) или (1.109)–(1.110), являются производные, а коэффициент  $\xi$  или  $\eta$  при производной лишь меняет нормировку решения, то есть без нарушения физики явления может быть выбран произвольным. Окончательное значение этого коэффициента может быть определено из сравнения значения импеданса, получаемого с помощью новых переменных, со значением импеданса, найденным независимым методом, например таким, с помощью которого в разделе 1.3 было получено выражение (1.49).

## 1.6. Импеданс для одномерной волны

Наиболее простым и в то же время достаточно общим волновым процессом можно считать распространение одномерной волны, то есть такой, в которой по координате меняется только одна переменная. Типичным примером одномерного волнового процесса является распространение волны в гибкой струне, рассмотренное в разделе 1.4.

Для получения импеданса одномерной волны воспользуемся приемом, описанным в разделе 1.5. Будем исходить из общего волнового уравнения (1.83)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad (1.117)$$

решение которого имеет вид:

$$G = G_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (1.118)$$

Введем новые переменные (1.86), (1.87):

$$u = \xi \frac{\partial G}{\partial t}; \quad (1.119)$$

$$v = -\frac{\partial G}{\partial x}. \quad (1.120)$$

Очевидно, обе эти переменные имеют волновой характер, подобный (1.118), так что для каждой из них можно получить самостоятельное волновое уравнение, подобное (1.117). Проверку такого утверждения авторы предоставляют любознательному читателю.

Задача настоящего раздела состоит в том, чтобы получить импеданс для одномерной волны, подобной волне в струне (раздел 1.4). Однако какой-либо стандартный прием для получения импеданса в задаче о струне, подобный примененному к длинной линии в разделе 1.3, авторам настоящей работы не известен. Такое обстоятельство не позволяет получить импеданс для одномерной волны в виде, подобном (1.49), однако не исключает возможности любознательному читателю приложить свои силы в этом направлении.

Здесь же воспользуемся допустимостью произвольного выбора параметра нормировки  $\xi$  (раздел 1.5.2) и зададим его в виде:

$$\xi = \frac{1}{\omega}. \quad (1.121)$$

При этом (1.119) и (1.120) принимают вид:

$$u = \frac{1}{\omega} \frac{\partial G}{\partial t}; \quad (1.122)$$

$$v = -\frac{\partial G}{\partial x}, \quad (1.123)$$

а импеданс (1.91) соответственно определяется выражением

$$Z = -\frac{1}{\omega} \frac{\frac{\partial G}{\partial t}}{\frac{\partial G}{\partial x}}. \quad (1.124)$$

При этом, подобно (1.96) и (1.97), получаем два выражения, удобные для вычисления импеданса в некоторых задачах:

$$Z = -i \frac{G}{\partial G / \partial x}, \quad (1.125)$$

а также

$$Z = -i \frac{1}{\omega k} \frac{\partial G / \partial t}{G}. \quad (1.126)$$

В обоих случаях импеданс принимает весьма удобный вид:

$$Z = \frac{1}{k}. \quad (1.127)$$

Вернемся еще раз к (1.122)–(1.123), продифференцируем (1.122) по  $x$  и (1.123) по  $t$ , после чего приравняем смешанные производные, а также продифференцируем (1.122) по  $t$  и (1.123) по  $x$ , после чего полученные вторые производные подставим в (1.117). В результате получим систему, совпадающую с (1.88)–(1.89):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\xi \frac{\partial v}{\partial t}; \quad (1.128)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{a^2 \xi} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.129)$$

Эта система по форме совпадает с (1.35)–(1.36) с точностью до замен:

$$L_0 \rightarrow \xi; \quad (1.130)$$

$$C_0 \rightarrow \frac{1}{a^2 \xi}. \quad (1.131)$$

Такое сходство позволяет воспользоваться определением импеданса в виде (1.49), в результате чего получаем:

$$Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \rightarrow \sqrt{\frac{\xi}{1/a^2 \xi}} = a\xi. \quad (1.132)$$

Это выражение можно считать определением импеданса для одномерной задачи. Если известен импеданс, то (1.132) позволяет определить  $\xi$  в виде (1.93):

$$\xi = \frac{Z}{a}. \quad (1.133)$$

### 1.6.1. Граничные условия для одномерной волны

При распространении в одномерной среде одномерных волн граничные условия на поверхности раздела двух сред состоят в равенстве амплитуд смещений и производных по координате от этих смещений по обе стороны от границы [116, стр. 496–497].

С другой стороны, поскольку амплитуды смещений и их производных в одной волне связаны между собой однозначно определяемой операцией дифференцирования, независимым из этих двух параметров является только какой-то один.

Таким образом, поскольку, согласно (1.125), импеданс можно рассматривать как отношение амплитуды смещения к амплитуде координатной производной от смещения, то в качестве граничных условий



может использоваться не только равенство смещений и их производных, но и равенство смещений и импедансов или производных и импедансов по обе стороны от границы.

## 1.7. Волновое уравнение для акустической волны в жидкости

В качестве следующего примера рассмотрим импеданс для акустической волны, распространяющейся в жидкости. Для этого найдем сначала соответствующее волновое уравнение.

Будем исходить из двух основных уравнений:

1) уравнение движения жидкости (уравнение Эйлера) [117, с. 15–16, форм. (2.3)], [54, стр. 35, форм. (36)]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad (1.134)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость движения выделенного элементарного объема жидкости,  $p$  — давление жидкости в том же объеме,  $\rho$  — плотность жидкости; а дифференциальный оператор  $\nabla$  равен:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}; \quad (1.135)$$

2) уравнение непрерывности [117, стр. 13–15, форм. (1.2)], [54, стр. 35, форм. (38)]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.136)$$

Учитывая возможность постороннего, не связанного с волной, движения жидкости, будем отсчитывать создаваемые волной отклонения давления, плотности и скорости выделенного объема жидкости, от тех значений этих же параметров, которые они принимали бы в отсутствие волны, то есть будем полагать:

$$p = p_0 + p', \quad (1.137)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad (1.138)$$

$$v = v_0 + v'. \quad (1.139)$$

Положим также, что эти отклонения являются достаточно малыми, то есть  $p' \ll p_0$ ,  $\rho' \ll \rho_0$ ,  $v' \ll v_0$ .

В таких приближениях, оставляя члены только первого порядка малости, из (1.134) и (1.136) получаем [117, стр. 15, форм. (2.1), (1.2)]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p' = 0, \quad (1.140)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v}' = 0. \quad (1.141)$$

Здесь полагается, что  $v_0$ ,  $p_0$  и  $\rho_0$  — величины постоянные, а также использовано известное соотношение [118, стр. 893, форм. (1.42)]:

$$\operatorname{div}(\psi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{div} \mathbf{a}. \quad (1.142)$$

Предположим, что приращение давления за счет волны прямо пропорционально приращению плотности, то есть

$$p' = a^2 \rho', \quad (1.143)$$

где  $a^2$  — коэффициент пропорциональности, в линейном приближении равный

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right). \quad (1.144)$$

Это соотношение является достаточно общим, например, для адиабатического распространения волны в газе [54, с. 36], то есть при

$$\frac{p}{\rho_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (1.145)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты, равный

$$\gamma = c_P / c_V, \quad (1.146)$$

в котором  $c_P$  и  $c_V$  — теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно [119, стр. 151, форм. (43.8)]. Учитывая (1.137)–(1.138) и ограничиваясь первым членом разложения правой части (1.145) в ряд Тейлора, получаем:

$$p' = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho', \quad (1.147)$$

то есть, сравнивая с (1.143), получаем [54, стр. 38]:

$$a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}. \quad (1.148)$$

Возвращаясь к жидкости, отметим, что полученные два уравнения (1.140) и (1.141) в сочетании с условием (1.143) полностью определяют процесс распространения волны. Получим из этих уравнений волновое уравнение стандартного вида.

Подставляя (1.143) в (1.140) и беря дивергенцию от обеих частей, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{v}) + \frac{a^2}{\rho_0} \operatorname{div} \operatorname{grad} \rho' = 0. \quad (1.149)$$

Учтем теперь, что  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \rho' = \Delta \rho'$ , где дифференциальный оператор  $\Delta$  равен:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.150)$$

Подставляя в (1.149)  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  из (1.141), получаем:

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \frac{a^2}{\rho_0} \Delta \rho' = 0, \quad (1.151)$$

откуда получаем

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a^2 \Delta \rho' = 0, \quad (1.152)$$

то есть волновое уравнение для приращения плотности.

Фазовая скорость волны плотности при этом равна:

$$v_p = a. \quad (1.153)$$

Учитывая соотношение (1.143), получаем аналогичное уравнение для волны приращения давления:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a^2 \Delta p' = 0. \quad (1.154)$$

Для волны, в которой движение выделенного объема жидкости происходит только вдоль одной координаты, например  $x$ , система уравнений (1.140)–(1.141) с учетом (1.143) принимает вид:

$$\frac{\partial v'_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad (1.155)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + a^2 \rho_0 \frac{\partial v'_x}{\partial x} = 0. \quad (1.156)$$

Дифференцируя первое уравнение по  $t$  и второе по  $x$ , после чего исключая смешанную производную от  $p'$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 v'_x}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x^2} = 0. \quad (1.157)$$

Аналогично, дифференцируя (1.155) по  $x$  и (1.156) по  $t$ , после чего исключая смешанную производную от  $v'$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0. \quad (1.158)$$

Эти два уравнения (1.157) и (1.158) также являются классическими волновыми уравнениями.

Заметим, что уравнение (1.157), в отличие от (1.152) и (1.154), относится только к одной компоненте скорости  $v_x$ , ориентированной вдоль направления вектора фазовой скорости волны. Однако такое ограничение в случае изотропной жидкости не снижает общности, так как в ней могут распространяться только одномерные продольные волны, смещение частиц в которых совпадает как с направлением распространения волны, так и с направлением вектора фазовой скорости. Можно видеть, что для этого случая уравнения (1.158) и (1.152), благодаря соотношению (1.143), являются эквивалентными.

Получим те же уравнения несколько более коротким способом.

Уравнения для плоской волны в жидкости, распространяющейся вдоль оси  $Ox$ , полученные на основе (1.134) и (1.136), аналогич-

ные (1.140) и (1.141) с учетом (1.143), имеют вид (для упрощения записи штрихи опускаем):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}; \quad (1.159)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{a^2 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (1.160)$$

где  $p$  и  $v$  — давление и скорость выделенного объема, обусловленные волной,  $a$  — фазовая скорость волны,  $\rho_0$  — плотность жидкости в отсутствие волны. Здесь подразумевается, что жидкость является однородной и изотропной, вследствие чего волна в жидкости является продольной, то есть скорость движения выделенного объема совпадает с направлением распространения волны, которое в свою очередь совпадает с направлением волнового вектора или фазовой скорости волны.

Дифференцируя первое уравнение по  $x$  и подставляя в полученное соотношение второе, получаем волновое уравнение для давления:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (1.161)$$

Аналогично, дифференцируя второе уравнение по  $x$  и подставляя в него первое, получаем волновое уравнение для скорости выделенного объема:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (1.162)$$

Эти уравнения аналогичны полученным ранее (1.158) и (1.157).

### 1.7.1. Импеданс для акустической волны

Обратимся теперь непосредственно к расчету импеданса для волны в жидкости. Прежде всего обратим внимание на систему (1.159)–(1.160). Можно видеть, что она совпадает по форме с системой (1.35)–(1.36) с точностью до замен:

$$U \rightarrow p; \quad (1.163)$$

$$I \rightarrow v; \quad (1.164)$$

$$L_0 \rightarrow \rho_0; \quad (1.165)$$

$$C_0 \rightarrow \frac{1}{a^2 \rho_0}. \quad (1.166)$$

Подставляя (1.32) и (1.33) в (1.49), получаем:

$$Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \rightarrow \sqrt{\frac{\rho_0}{1/a^2 \rho_0}} = a \rho_0. \quad (1.167)$$

В то же время, уравнения (1.161) и (1.162) позволяют рассматривать  $p$  и  $v$  как переменные, отношение которых дает импеданс. Решение волновых уравнений (1.161) и (1.162) имеют вид:

$$p = p_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (1.168)$$

$$v = v_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (1.169)$$

где  $p_0$  и  $v_0$  — постоянные амплитуды,  $k = \omega/a$  — волновое число.

Учтем теперь, что в соответствии с (1.3) импеданс равен отношению напряжения к току, то есть в соответствии с (1.163), (1.164), а также (1.168), (1.169)

$$Z = \frac{U}{I} \rightarrow \frac{p}{v} = \frac{p_0}{v_0}. \quad (1.170)$$

Подставляя (1.168)–(1.169) в (1.159)–(1.160), получаем:

$$kp_0 = \omega \rho_0 v_0; \quad (1.171)$$

$$kv_0 = \omega \frac{1}{a^2 \rho_0} p_0. \quad (1.172)$$

Разделяя первое уравнение на второе и выделяя отношение амплитуд давления и скорости, получаем:

$$\frac{p_0}{v_0} = a \rho_0, \quad (1.173)$$

то есть импеданс (1.170) равен

$$Z_a = a \rho_0, \quad (1.174)$$

что полностью совпадает с (1.167).

Эта величина представляет собой классический акустический импеданс  $Z_a$  [4, стр. 9, форм. (2.6)], [8, стр. 28, форм. (2.20)] для среды с плотностью  $\rho_0$  и скоростью распространения волны  $a$ .

Таким образом, акустический импеданс среды представляет собой отношение амплитуд давления и скорости выделенного объема жидкости в плоской волне, распространяющейся в этой среде. Заметим, что введенное так понятие импеданса относится не к волне, а именно к жидкости, так как плотность и скорость распространения волн (в предположении отсутствия дисперсии) определяются свойствами самой жидкости.

Введем еще один удобный для практики вид выражения для одномерного волнового импеданса. Так, учитывая (1.159) и временную зависимость  $e^{i\omega t}$ , получаем:

$$v = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.175)$$

Подставляя это выражение в (1.170), получаем:

$$Z_a = -i \rho_0 \omega \frac{p_0}{\partial p / \partial x}. \quad (1.176)$$

Эта формула является аналогом (1.107) для общего случая и (1.125) для одномерной волны. Полагая зависимость от координаты в виде  $e^{-ikx}$ , возвращаемся к формуле (1.174).

Аналогичным образом, используя (1.160), при временной зависимости  $e^{i\omega t}$  можно получить:

$$p = \frac{ia^2\rho_0}{\omega} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.177)$$

откуда, беря отношение давления к скорости выделенного объема, аналогично (1.176) получаем:

$$Z_a = i \frac{a^2\rho_0}{\omega} \frac{\partial v/\partial x}{v_0}. \quad (1.178)$$

Это выражение, по форме отличающееся от (1.176), тем не менее, является его полным аналогом, в чем легко убедиться, выражая  $\partial v/\partial x$  через  $p$  с помощью (1.160) и  $v$  через  $\partial p/\partial x$  с помощью (1.175), а также учитывая временную зависимость в виде  $e^{i\omega t}$ .

Заметим, что формулы (1.176) и (1.178) справедливы только для одной волны с волновым числом  $k$ , распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$ . Можно видеть, что здесь акустический импеданс, в отличие от одномерного случая, определяется свойствами только среды и от параметров волны не зависит.

Напомним, что речь идет об однородной изотропной жидкости. В случае неоднородной или анизотропной среды определение импеданса будет другим и здесь не рассматривается.

### 1.7.2. Граничные условия для акустической волны

При распространении в жидкости продольных акустических волн граничные условия на поверхности раздела двух сред (двух жидкостей) состоят в равенстве амплитуд давлений и нормальных скоростей движения выделенных объемов жидкостей по обе стороны от границы [4, стр. 9, форм. (2.7)].

Будем полагать нормаль к границе совпадающей с осью  $Ox$ . Поскольку амплитуды давления и скорости движения выделенного объема распространяющейся акустической волны связаны между собой, то независимым из этих двух параметров является только какой-то один. Так, если задано давление, то скорость выделенного объема определяется полученным из (1.159) соотношением

$$v = \frac{i}{\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.179)$$

Таким образом, можно считать, что в этом случае граничные условия состоят в равенстве волновых функций (давлений) и их координатных производных (скоростей) по обе стороны от границы.

Далее, поскольку импеданс равен отношению амплитуд давления и скорости, то в качестве граничных условий может использоваться

не только равенство компонент обеих этих параметров, но и равенство одного из них в сочетании с равенством импедансов. Так, например, граничные условия могут состоять в равенстве давлений и импедансов или скоростей и импедансов по обе стороны от границы [4, стр. 10, форм. (2.12)–(2.13)].

## 1.8. Волновое уравнение для электромагнитной волны

В качестве следующего примера обратимся к весьма важному случаю электромагнитных волн. Как и ранее, сначала приведен волновое уравнение, после чего получим импеданс.

Рассмотрим однородную изотропную среду, обладающую диэлектрической и магнитной проницаемостями.

Для такой среды классические уравнения электродинамики, записанные в системе СИ, имеют вид [108, стр. 352–354, 673, форм. (82.1a), (82.2a) с учетом (82.10), (82.11)]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (1.180)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.181)$$

От первого уравнения возьмем ротор:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{H}). \quad (1.182)$$

Левую часть этого уравнения преобразуем с помощью известного векторного соотношения [118, стр. 894, форм. (1.50)]

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}, \quad (1.183)$$

учтем, что  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , а в правую часть (1.182) подставим (1.181). В результате получим:

$$\Delta \mathbf{E} = \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.184)$$

Это соотношение является классическим волновым уравнением для электрического поля  $\mathbf{E}$ . Из второго основного уравнения электродинамики (1.181) аналогично получаем волновое уравнение для магнитного поля:

$$\Delta \mathbf{H} = \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (1.185)$$

Полученные волновые уравнения допускают решение в виде плоских волн:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (1.186)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (1.187)$$

где  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  — постоянные амплитуды,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, направленный вдоль фазовой скорости волны, а волновое число и частота связаны с параметрами среды соотношением

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}. \quad (1.188)$$

Учитывая классическое определение фазовой скорости волны

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad (1.189)$$

получаем:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}. \quad (1.190)$$

При этом волновые уравнения (1.184) и (1.185) принимают вид:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \quad (1.191)$$

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (1.192)$$

В качестве частного случая рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль одного направления. Для такой волны, вследствие ее поперечного характера отличны от нуля только поперечные компоненты электрического и магнитного полей. Введем декартову систему координат  $Oxyz$ , такую, что ее ось  $Ox$  направлена вдоль волнового вектора волны, ось  $Oy$  — направлена вдоль электрического поля, а ось  $Oz$  — вдоль магнитного, то есть

$$\mathbf{E} = \{0; E_y; 0\}, \quad (1.193)$$

$$\mathbf{H} = \{0; 0; H_z\}, \quad (1.194)$$

При этом уравнения (1.191)–(1.192) принимают вид классических волновых уравнений для одной переменной:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad (1.195)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (1.196)$$

### 1.8.1. Импеданс для электромагнитной волны

Найдем теперь импеданс для электромагнитной волны. Будем исходить из волновых уравнений для электрического и магнитного поля (1.186)–(1.187). Решения этих уравнений имеют вид:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (1.197)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}. \quad (1.198)$$

где  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  — постоянные амплитуды.



При зависимости от времени в виде  $e^{i\omega t}$  уравнения электродинамики (1.180)–(1.181) принимают вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu\mu_0\mathbf{H}, \quad (1.199)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}. \quad (1.200)$$

Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $Ox$  (то есть такой, для полей которой зависимости от координат  $y$  и  $z$  отсутствуют), учитывая (1.193)–(1.194), выражения для ротора получаем в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{k} \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (1.201)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{j} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (1.202)$$

где  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{j}$  — единичные векторы осей  $Oz$  и  $Oy$  соответственно.

Подставляя (1.201)–(1.202) в (1.199)–(1.200) и учитывая зависимость от координаты  $x$  вида  $e^{-ikx}$ , получаем:

$$kE_0 = \omega\mu\mu_0H_0, \quad (1.203)$$

$$kH_0 = \omega\varepsilon\varepsilon_0E_0. \quad (1.204)$$

Разделяя первое уравнение на второе и выделяя отношение амплитуд полей, получаем:

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (1.205)$$

Эта величина представляет собой классический электродинамический импеданс среды  $Z_e$  с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu$  [120, стр. 226, форм. (7.126)], то есть

$$Z_e = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (1.206)$$

При  $\varepsilon = 1$  и  $\mu = 1$ , получаем классический «импеданс вакуума», обозначаемый обычно  $R_x$ , иногда называемый «волновым или характеристическим сопротивлением вакуума» [120, стр. 226, форм. (7.127)]:

$$R_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad (1.207)$$

Подставляя значения магнитной и электрической постоянных [121, стр. 67, 93], [120, стр. 227]

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м}, \quad (1.208)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}, \quad (1.209)$$

получаем [120, стр. 227, форм. (7.128)]:

$$R_x = 120\pi = 377 \text{ Ом}. \quad (1.210)$$

Таким образом, электродинамический импеданс среды представляет собой отношение амплитуд электрического и магнитного полей плоской волны, распространяющейся в этой среде. Иначе можно сказать, что отношение амплитуд электрического и магнитного полей распространяющейся в среде плоской волны равно импедансу этой среды.

Рассмотрим теперь получение импеданса для электромагнитной волны с помощью общего приема, описанного в разделе 1.5. Для этого надо на основе общих уравнений электродинамики (1.180)–(1.181) получить систему из двух взаимно сопряженных уравнений первого порядка типа (1.88)–(1.89), для длинной линии имеющих вид (1.35)–(1.36). Сделаем это для распространяющейся вдоль оси  $Ox$  плоской волны, поля которой определяются выражениями (1.193)–(1.194). Так, раскрывая роторы в выражениях (1.201) и (1.202) и оставляя только отличные от нуля компоненты, получаем:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}; \quad (1.211)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (1.212)$$

Эти уравнения совпадают с (1.35)–(1.36) с точностью до замен:

$$U \rightarrow E_y; \quad (1.213)$$

$$I \rightarrow H_z; \quad (1.214)$$

$$L_0 \rightarrow \mu\mu_0; \quad (1.215)$$

$$C_0 \rightarrow \varepsilon\varepsilon_0. \quad (1.216)$$

Подставляя (1.215) и (1.216) в (1.49), получаем:

$$Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}, \quad (1.217)$$

что совпадает с выражением (1.206).

Получим еще один удобный для практики вид выражения для электродинамического импеданса. Так, учитывая (1.199) и (1.201), получаем:

$$H_z = -\frac{i}{\omega\mu\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (1.218)$$

Сохраняя в этом выражении координатную производную и подобно (1.206) полагая импеданс как отношение электрического поля к магнитному, получаем:

$$Z_e = i\omega\mu\mu_0 \frac{E_y}{\partial E_y / \partial x}. \quad (1.219)$$

Эта формула является аналогом (1.107), (1.96) для общего случая, (1.125) для одномерной волны и (1.176) для акустической волны. Полагая зависимость от координаты в виде  $e^{-ikx}$ , с учетом (1.188), возвращаемся к формуле (1.206).

Аналогичным образом из (1.200) и (1.202) получаем:

$$E_y = -\frac{i}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (1.220)$$

откуда, определяя импеданс как отношение электрического поля к магнитному, получаем:

$$Z_m = -i \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \frac{\partial H_z / \partial x}{H_z}. \quad (1.221)$$

Это выражение, по форме отличающееся от (1.219), тем не менее, является его полным аналогом, в чем легко убедиться, выражая  $\partial H_z / \partial x$  через  $E_y$  с помощью (1.200) и (1.202) и  $H_z$  через  $\partial E_y / \partial x$  с помощью (1.199), а также учитывая временную зависимость в виде  $e^{i\omega t}$ . При зависимости от координаты вида  $e^{-i\omega t}$ , с учетом (1.188), приходим к формуле (1.206).

Таким образом, (1.219) и (1.221) эквивалентны в том отношении, что первая из них определяет импеданс через электрическое поле волны, а вторая — тот же импеданс через магнитное поле той же волны. При этом надо учитывать, что при одинаковом направлении электрического поля прямой и встречной волн, направления магнитных полей тех же волн противоположны, то есть, если знаки амплитуд прямой и встречной волн в формуле (1.219) одинаковы, то в формуле (1.221) они противоположны. С учетом такого замечания значения импедансов, определяемые формулами (1.219) и (1.221), полностью совпадают.

Рассмотрим плоскую волну, по-прежнему распространяющуюся вдоль оси  $Ox$ , так что ее волновой вектор направлен вдоль той же оси  $Ox$ , однако магнитное поле направлено вдоль оси  $Oy$ , а электрическое — вдоль оси  $Oz$ , то есть

$$\mathbf{E} = \{0; 0; E_z\}; \quad (1.222)$$

$$\mathbf{H} = \{0; H_y; 0\}. \quad (1.223)$$

Уравнения, подобные (1.211)–(1.212), принимают вид:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (1.224)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (1.225)$$

Для импеданса, как отношения электрического поля к магнитному, получаем выражение через электрическое поле  $E_z$  в виде

$$Z_e = -i\omega \mu \mu_0 \frac{E_z}{\partial E_z / \partial x}, \quad (1.226)$$

аналогично через магнитное поле  $H_y$  получаем импеданс в виде

$$Z_m = -\frac{i}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \frac{\partial H_y / \partial x}{H_y}. \quad (1.227)$$

Подобно формулам (1.219) и (1.221), формулы (1.226) и (1.227) являются между собой эквивалентными.

В наиболее общем случае произвольного направления распространения волны для импеданса можно получить более общую формулу. Так, выражая магнитное поле  $\mathbf{H}$  через электрическое  $\mathbf{E}$  с помощью уравнения (1.200) и определяя импеданс как отношение электрического поля к магнитному, получаем:

$$Z_e = -i\omega\mu\mu_0 \frac{\mathbf{E}}{\text{rot } \mathbf{E}}. \quad (1.228)$$

Однако полученная так формула не имеет математической корректности, так как операция деления вектора на вектор математически не определена. Поэтому для полной корректности, хотя и с некоторым сужением общности, можно определить импеданс по отношению к какой-то плоскости, в качестве которой при решении граничных задач обычно принимается плоскость границы. Таким образом, можно определить импеданс в виде отношения касательных к этой плоскости компонент электрического и магнитного полей, то есть в виде

$$Z_e = -i\omega\mu\mu_0 \frac{\mathbf{E}|_S}{\text{rot } \mathbf{E}|_S}. \quad (1.229)$$

В случае распространения вдоль оси  $Ox$  волны, электрическое поле которой направлено вдоль оси  $Oy$ , определение (1.229) переходит в (1.219).

Аналогичное выражение можно получить для магнитного поля:

$$Z_e = \frac{i}{\omega\epsilon\epsilon_0} \frac{\text{rot } \mathbf{H}|_S}{\mathbf{H}|_S}. \quad (1.230)$$

Как и (1.219) и (1.221), выражения (1.229) и (1.230) являются эквивалентными.

Заметим, что здесь, как и в предыдущих случаях, речь идет об однородной изотропной среде. В случае неоднородной, анизотропной или тензорной среды определение импеданса, в основе которого лежит отношение электрического и магнитного полей, должно принимать вид, соответствующий конкретной конфигурации компонент полей распространяющейся волны.

### 1.8.2. Граничные условия для электромагнитной волны

При распространении в среде электромагнитных волн граничные условия на поверхности раздела двух сред состоят в равенстве амплитуд касательных к поверхности компонент электрических и магнитных полей волн по обе стороны от границы [118, стр. 698–699, форм. (5.2), (5.4)].

В то же время, если амплитуды электрического и магнитного полей распространяющейся волны связаны между собой, то независимым является только одно какое-то поле. Так, если задано электрическое поле волны, то ее магнитное поле определяется получаемым из (1.199) соотношением:

$$\mathbf{H} = \frac{i}{\omega\mu\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}. \quad (1.231)$$

Аналогично, если задано магнитное поле, то электрическое поле волны имеет вид:

$$\mathbf{E} = -\frac{i}{\omega\epsilon\epsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (1.232)$$

Таким образом, поскольку ротор представляет собой комбинацию из производных по координатам, то можно считать, что в этом случае граничные условия состоят в равенстве волновых функций и их координатных производных по обе стороны от границы.

Далее, поскольку импеданс равен отношению электрического и магнитного полей, то в качестве граничных условий может использоваться не только равенство компонент обоих полей, но и равенство компонент одного из полей в сочетании с равенством импедансов. Так, например, граничные условия могут состоять в равенстве касательных составляющих электрических полей волн в совокупности с равенством импедансов или равенство магнитных полей волн в совокупности с равенством импедансов.

## 1.9. Общность волновых явлений разной природы

Полученные результаты, относящиеся к волновым процессам различной природы, имеют высокую степень общности. Во всех рассмотренных случаях распространение волн описывается с помощью двух переменных, образующих систему двух уравнений первого порядка, причем каждая из переменных удовлетворяет волновому уравнению второго порядка. Для удобства сравнения приведем здесь упомянутые системы еще раз.

Так, для длинной линии получены уравнения (1.35)–(1.36):

$$\frac{U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}; \quad (1.233)$$

$$\frac{I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (1.234)$$

Для одномерной волны получены уравнения (1.88)–(1.89), (1.128)–(1.129):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\xi \frac{\partial v}{\partial t}; \quad (1.235)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{a^2 \xi} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.236)$$

при замене (1.121) принимающие вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (1.237)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\omega}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.238)$$

Для акустической волны в жидкости получены уравнения (1.159)–(1.160):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (1.239)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{a^2 \rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1.240)$$

Для электромагнитной волны, электрическое поле которой направлено вдоль оси  $Oy$ , а магнитное вдоль оси  $Oz$ , получены уравнения (1.211)–(1.212):

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (1.241)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (1.242)$$

Для электромагнитной волны, электрическое поле которой направлено вдоль оси  $Oz$ , а магнитное вдоль оси  $Oy$ , получены уравнения (1.224)–(1.225):

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (1.243)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (1.244)$$

Легко видеть, что все приведенные здесь системы уравнений с точностью до коэффициентов полностью совпадают.

Все приведенные здесь системы позволяют получить волновое уравнение второго порядка вида (1.83) для каждой из переменных в отдельности, решение которого имеет волновой характер вида (1.84).

Определения импедансов через волновую функцию и ее производную также весьма близки.

Так, при обращении к полному волновому уравнению (1.83), общее выражение для импеданса имеет вид (1.91):

$$Z = -\xi \frac{\frac{\partial G}{\partial t}}{\frac{\partial G}{\partial x}}. \quad (1.245)$$

Раскрывая в этом выражении производную по времени или по координате, согласно (1.96), (1.97), для импеданса получаем два эквивалентных выражения:

$$Z = -i\omega\xi \frac{G}{\partial G/\partial x}; \quad (1.246)$$

$$Z = -i \frac{\xi}{k} \frac{\partial G/\partial t}{G}. \quad (1.247)$$

Для длинной линии имеем (1.107), (1.108):

$$Z = -i\omega L_0 \frac{G}{\partial G/\partial x}; \quad (1.248)$$

$$Z = -i \frac{L_0}{k} \frac{\partial G/\partial t}{G} = -i \frac{L_0 a}{\omega} \frac{\partial G/\partial t}{G}. \quad (1.249)$$

Для одномерной волны, согласно (1.125), (1.126), имеем:

$$Z = -i \frac{G}{\partial G/\partial x}; \quad (1.250)$$

$$Z = -i \frac{1}{\omega k} \frac{\partial G/\partial t}{G}. \quad (1.251)$$

Для акустической волны импеданс получен в виде (1.176), (1.177), совпадающем с (1.99), (1.101):

$$Z_a = -i\rho_0\omega \frac{p}{\partial p/\partial x}. \quad (1.252)$$

$$Z_a = i \frac{a^2 \rho_0}{\omega} \frac{\partial v/\partial x}{v}. \quad (1.253)$$

Для электромагнитной волны с электрическим полем вдоль оси  $Oy$  импеданс имеет вид (1.246), (1.247), также совпадающий с (1.99), (1.101):

$$Z_e = -i\omega\mu\mu_0 \frac{E_y}{\partial E_y/\partial x}; \quad (1.254)$$

$$Z_m = -i \frac{1}{\omega\epsilon\epsilon_0} \frac{\partial H_z/\partial x}{H_z}. \quad (1.255)$$

Таким образом, во всех приведенных случаях импеданс определяется через прямое или обратное отношение волновой функции к производной от этой функции по времени или по координате. Из такого определения импеданса и будем исходить в дальнейшем.

### 1.10. Размерность и физический смысл понятия импеданса

Введенное в предыдущих разделах понятие импеданса является характеристикой протекания волновых процессов. Размерность и физический смысл понятия импеданса для длинной линии очевиден и совпадает с размерностью и смыслом электрического сопротивления, поэтому подробно останавливаться на этом не будем. Рассмотрим размерность и смысл импеданса для более сложных случаев, таких как одномерная волна в струне, акустическая волна в жидкости и электромагнитная волна в среде с электродинамическими параметрами. Будем пользоваться системой СИ и в случае необходимости системой СГС в соответствии с книгами [121, стр. 224–239], [120, стр. 289–305].

### 1.10.1. Одномерная волна

Согласно определению (1.92) с учетом (1.121), импеданс для одномерной волны в одномерной среде равен:

$$Z_u = \frac{a}{\omega}, \quad (1.256)$$

где  $a$  — скорость волны (фазовая),  $\omega$  — ее частота (круговая или циклическая).

Размерности скорости и частоты имеют вид:

$$[a] = \frac{L}{T} = \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad (1.257)$$

$$[\omega] = \frac{1}{T} = \frac{1}{\text{с}}. \quad (1.258)$$

Получаем размерность импеданса

$$[Z_u] = L = \text{м}. \quad (1.259)$$

Эта величина называется одномерным волновым импедансом и ее размерность совпадает с размерностью геометрической длины.

### 1.10.2. Акустика

Согласно определению (1.170), импеданс для акустических волн в жидкости (с точностью до знака и направления скорости) равен:

$$Z_a = \frac{p}{v}, \quad (1.260)$$

где  $p$  — давление звуковой волны в жидкости,  $v$  — скорость движения волны в жидкости (имеется в виду фазовая скорость).

Размерности давления (паскаль) и скорости (метр в секунду) имеют вид:

$$[p] = \frac{M}{LT^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}, \quad (1.261)$$

$$[v] = \frac{L}{T} = \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (1.262)$$

Получаем размерность импеданса

$$[Z_a] = \frac{M}{L^2T}. \quad (1.263)$$

Эта величина называется акустическим импедансом, и ее размерность совпадает с размерностью «удельного акустического сопротивления», единица измерения которого: «паскаль-секунда на метр» [121, стр.238], [120, стр. 300].

### 1.10.3. Электродинамика

Согласно определению (1.206), импеданс для электромагнитных волн равен:

$$Z_e = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}, \quad (1.264)$$

где  $\mu$  и  $\varepsilon$  — магнитная и диэлектрическая проницаемости среды,  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  — магнитная и электрическая постоянные системы СИ.



Размерности магнитной и диэлектрической проницаемостей в системе СИ равны единице («безразмерные»).

Размерность магнитной постоянной (генри на метр) [121, стр. 234]

$$[\mu_0] = \frac{LM}{T^2 I^2}. \quad (1.265)$$

Размерность электрической постоянной (фарада на метр) [121, стр. 230]

$$[\varepsilon_0] = \frac{T^4 I^2}{L^3 M}. \quad (1.266)$$

Получаем размерность импеданса

$$[Z_e] = \frac{L^2 M}{T^3 I^2}. \quad (1.267)$$

Эта величина называется «электрическим импедансом». Ее размерность совпадает с размерностью электрического сопротивления в системе СИ (ом) [121, стр. 232], [120, стр. 302]:

$$[R] = \frac{L^2 M}{T^3 I^2}. \quad (1.268)$$

Как можно видеть, размерности акустического (1.263) и электродинамического (1.267) импедансов различаются. Такое различие обусловлено наличием в системе СИ в качестве одной из основных единиц — силы тока  $I$ , измеряемой в амперах. Если обратиться к системе СГС, где сила тока является производной единицей от механических величин, то имеем [121, стр. 230], [120, стр. 303]:

$$[I]_{\text{СГС}} = \frac{L^{3/2} M^{1/2}}{T^2}. \quad (1.269)$$

Подставляя (1.269) в (1.267), получаем:

$$[Z_e]_{\text{СГС}} = \frac{T}{L}. \quad (1.270)$$

В то же время размерность электрического сопротивления в системе СГС равна [121, стр. 232], [120, стр. 303]:

$$[R]_{\text{СГС}} = \frac{T}{L}. \quad (1.271)$$

Таким образом, и здесь размерность электродинамического импеданса совпадает с размерностью электрического сопротивления.

### 1.11. Замечание о физическом смысле понятия импеданса

Как видим, размерность импеданса для акустической и электромагнитной волн совпадает с размерностью акустического или электри-

ческого сопротивления. Проводя физическую аналогию с постоянным электрическим током, можно полагать, что среда, при проникновении в нее волны, продвижению этой волны препятствует примерно так же, как электрический проводник препятствует движению в нем зарядов, образующих электрический ток. То есть понятие акустического или электродинамического импеданса аналогично понятию сопротивления среды по отношению к распространяющейся в ней волне.

Для одномерной волны понятие сопротивления изначально не определено, однако здесь, исходя из размерности, тоже можно полагать аналогом сопротивления геометрическую длину среды, то есть чем среда протяженнее, тем сильнее она препятствует распространению в ней волны. Такая пропорциональность сопротивления одномерной среды ее протяженности аналогична пропорциональности сопротивления электрическому току, текущему в проводнике, длине этого проводника.

Таким образом, во всех случаях, чем больше импеданс среды, тем больше эта среда препятствует распространению в ней волны, то есть тем больше ее волновое сопротивление.

## Выводы по главе 1

Данная глава посвящена краткому обзору физических представлений и математического аппарата, необходимых для рассмотрения материала, излагаемого в последующих главах монографии. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Получены волновые уравнения, введено определение импеданса и рассмотрены граничные условия для различных типов волн: тока и напряжения в длинной линии, одномерных смещения и скорости в одномерной среде (типа волн в струне), акустических сжатия и разрежения в жидкости и электромагнитных электрического и магнитного полей в среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями.

2. В результате продельного рассмотрения показано, что распространение волн различной природы в различных средах имеет следующие общие особенности.

Волновое движение элементов среды можно описать с помощью системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка для двух переменных.

Производная по времени каждой из этих переменных пропорциональна производной по координате от другой переменной.

Каждая из переменных удовлетворяет независимому классическому волновому уравнению, содержащему вторые производные по времени и координате от этой переменной.

Эти волновые уравнения допускают решения в виде распространяющихся гармонических волн, причем волновая зависимость от координаты и времени для обеих переменных является одинаковой.

3. В случае гармонических решений можно ввести импеданс, равный отношению амплитуд переменных и определяемый свойствами только среды или как среды, так и волны.

В качестве наиболее общего определения импеданса для всех рассмотренных типов волн можно положить отношение волновой функции к ее производной по координате, умноженное на мнимую единицу со знаком минус.

4. Граничные условия на поверхности раздела двух сред представляют собой равенство амплитуд волновых функций и их производных по координате по разные стороны от границы.

Вариантом граничных условий может явиться равенство амплитуд волновых функций в сочетании с импедансами или производных волновых функций в сочетании с импедансами по разные стороны от границы.

## Глава 2

# ОБОБЩЕННЫЙ ИМПЕДАНС ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава посвящена введению в рассмотрение понятия обобщенного импеданса как отношения волновой функции волны к производной от этой функции по координате. Такой импеданс зависит не только от свойств среды, но и от пространственных координат и амплитуд распространяющихся волн. Получен обобщенный импеданс для волн одномерных, акустических и электромагнитных. Рассмотрены случаи продольного и наклонного распространения волн прямого и обратного (встречного) направлений. Приведена сводная таблица импедансов для всех рассмотренных случаев.

В главе частично использован материал монографии [59, стр. 31–44]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 2.1. Основание для введения обобщенного импеданса

Введенное в предыдущей главе понятие импеданса определяется для одномерной волны свойством среды в сочетании с частотой волны, а для акустической и электромагнитной волн — свойством только среды, никак не зависящим от свойств волны.

Такое определение хорошо только для характеристики свойств среды и никак не отражает характеристики волнового процесса в целом. Так, если, например, для электромагнитной волны импеданс можно трактовать как отношение электрического поля к магнитному, то такое отношение остается неизменным только в случае одной волны, распространяющейся в однородной среде без затухания. Если же на пути волны встречаются какие-либо неоднородности или препятствия, порождающие отраженные волны, то есть в среде одновременно распространяются две волны во встречных направлениях, то суммарные электрическое и магнитное поля волнового процесса, благодаря интерференционному сложению волн с различными амплитудами и фазами, в разных точках пространства будут различаться. При этом и отношение суммарного электрического поля к суммарному магнитному от точки к точке будет меняться, то есть в этом случае определение импеданса как отношения электрического поля к магнитному становится неоднозначным.

Сложившееся положение побуждает ввести понятие «обобщенного импеданса», равного отношению двух различных видов полей в каждой

точке пространства. Очевидно, при этом обобщенный импеданс будет зависеть как от амплитуд взаимно интерферирующих волн, так и от пространственных координат среды, где распространяется волна. Рассмотрим понятие обобщенного импеданса для различных видов волн в отдельности.

## 2.2. Обобщенный импеданс для одномерной волны

Приведем схему введения обобщенного потенциала на примере упрощенного решения общего волнового уравнения для случая свободного распространения одномерной волны в среде без затухания [1, стр. 26–30].

Будем рассматривать одномерную волну, для которой волновое уравнение имеет вид (1.83):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

где  $G$  — волновая функция,  $a$  — фазовая скорость волны.

Решение этого уравнения для волны, распространяющейся в положительном (прямом) направлении оси  $Ox$ , имеет вид (1.84):

$$G = G_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (2.2)$$

Выделим гармоническую зависимость от времени в виде отдельного экспоненциального множителя, то есть будем считать:

$$G = U e^{i\omega t}, \quad (2.3)$$

где  $U$  — остающаяся координатная составляющая волны.

Подставляя (2.3) в (2.2) и вводя волновое число

$$k = \frac{\omega}{a}, \quad (2.4)$$

получаем уравнение для координатной составляющей волны:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + k^2 U = 0. \quad (2.5)$$

Полное решение этого уравнения имеет вид суперпозиции волн прямого и обратного направлений:

$$U = A e^{-ikx} + B e^{ikx}, \quad (2.6)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Учет в (2.3) волны, распространяющейся в отрицательном (обратном) направлении оси  $Ox$  приводит к тому же результату.

Воспользуемся определением импеданса в виде (1.125)

$$Z_u = -i \frac{U}{\partial U / \partial x}, \quad (2.7)$$

для чего найдем производную:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -ik(Ae^{-ikx} - Be^{ikx}). \quad (2.8)$$

Подставляя (2.6) и (2.8) в (2.7), получаем:

$$Z_u = \frac{1}{k} \frac{Ae^{-ikx} + Be^{ikx}}{Ae^{-ikx} - Be^{ikx}}. \quad (2.9)$$

Вводя «нулевой импеданс» с помощью обозначения

$$Z_{u0} = \frac{1}{k}, \quad (2.10)$$

получаем:

$$Z_u = Z_{u0} \frac{Ae^{-ikx} + Be^{ikx}}{Ae^{-ikx} - Be^{ikx}}. \quad (2.11)$$

Можно видеть, что определенный таким образом обобщенный импеданс зависит от координаты точки  $x$  и от параметров среды в этой точке (через скорость  $a$ , определяющую волновое число  $k$  при заданной частоте  $\omega$  в соответствии с (2.4)). То есть можно сказать, что для одной волны обобщенный импеданс зависит только от волнового числа и при заданной частоте определяется только параметрами материала среды, в которой распространяется волна, тогда как для двух встречных волн импеданс кроме того зависит еще от соотношения амплитуд этих волн, а также от координаты или положения точки начала отсчета.

## 2.3. Обобщенный импеданс для акустической волны

Плоская акустическая волна в жидкости, являясь продольной, то есть по сути одномерной, существует в трехмерной среде, то есть при жестко заданной декартовой системе координат  $Oxyz$  может распространяться в любом произвольном направлении относительно координатной оси  $Ox$ . Поэтому имеет смысл отдельно рассмотреть два случая распространения такой волны: продольного и наклонного относительно оси  $Ox$ .

### 2.3.1. Продольное распространение вдоль оси $Ox$

Рассмотрим сначала случай продольного (коллинеарного) распространения акустической волны относительно оси  $Ox$ .

Поскольку скорость выделенного объема и давление волны между собой однозначно связаны, ограничимся рассмотрением только давления, волновое уравнение для которого имеет вид (1.161):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \quad (2.12)$$

Полагая

$$p = P e^{i\omega t}, \quad (2.13)$$

получаем уравнение для координатной составляющей волны:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + k^2 P = 0, \quad (2.14)$$

где волновое число  $k$ , подобно (2.4), имеет вид

$$k = \frac{\omega}{a}. \quad (2.15)$$

Полное решение этого уравнения, подобно (2.6), представляет собой суперпозицию волн прямого и обратного направлений:

$$P = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \quad (2.16)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Воспользуемся определением акустического импеданса, при единой для всех волн зависимости от времени  $e^{i\omega t}$  имеющим вид (1.176):

$$Z_a = -i\rho_0\omega \frac{P}{\partial P/\partial x}, \quad (2.17)$$

где  $P$  определяется формулой (2.16).

Находим производную:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -ik(Ae^{-ikx} - Be^{ikx}). \quad (2.18)$$

Подставляя (2.16) и (2.18) в (2.17) и учитывая (2.15), получаем:

$$Z_a = a\rho_0 \frac{Ae^{-ikx} + Be^{ikx}}{Ae^{-ikx} - Be^{ikx}}. \quad (2.19)$$

Вводя «нулевой импеданс» с помощью обозначения

$$Z_{a0} = a\rho_0, \quad (2.20)$$

получаем:

$$Z_a = Z_{a0} \frac{Ae^{-ikx} + Be^{ikx}}{Ae^{-ikx} - Be^{ikx}}. \quad (2.21)$$

В таком виде эта формула аналогична (2.11) для одномерной волны с точностью до определения нулевых импедансов (2.10) и (2.20).

### 2.3.2. Наклонное распространение относительно оси $Ox$

Рассмотрим теперь случай наклонного (неколлинеарного) распространения акустической волны относительно оси  $Ox$ .

Будем называть плоскостью распространения волны плоскость, проходящую через волновой вектор волны  $\mathbf{k}$  и координатную ось  $Ox$ . Совместим координатную плоскость  $Oxy$  с плоскостью распространения и обозначим угол между вектором  $\mathbf{k}$  и осью  $Ox$  через  $\theta$ . Как и в коллинеарном случае ограничимся рассмотрением только волны давления.

В общем случае надо рассматривать волны, распространяющиеся в положительном (индекс «i») и отрицательном (индекс «r») направлениях оси  $Ox$ , ориентация волновых векторов для которых показана на рис. 2.1.

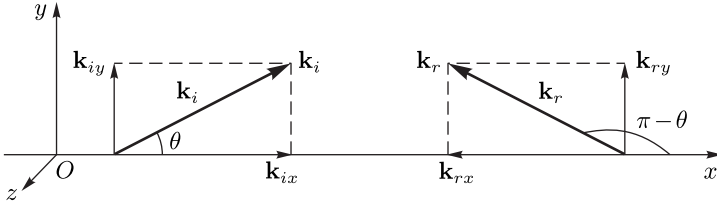


Рис. 2.1. Схема ориентации волновых векторов акустических волн прямого и встречного направлений при неколлинеарном распространении относительно оси  $Ox$

При отсчете угла  $\theta$  от оси  $Ox$  в одном и том же положительном направлении для обоих направлений распространения волн, волновой вектор имеет компоненты:

$$k_x = k \cos \theta; \quad (2.22)$$

$$k_y = k \sin \theta; \quad (2.23)$$

$$k_z = 0, \quad (2.24)$$

где индексы «i» и «r» опущены, так как направление распространения определяется знаком угла  $\theta$ .

Исходное волновое уравнение для давления имеет вид, подобный (2.12) с учетом двух компонент давления по осям  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (2.25)$$

Полагая

$$p = P(x, y)e^{i\omega t}, \quad (2.26)$$

получаем уравнение для координатной составляющей волны:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + k^2 P = 0, \quad (2.27)$$

где, как и прежде, волновое число  $k$  определяется формулой (2.15).

Решим это уравнение методом разделения переменных [54, стр. 82–88]. Положим

$$P(x, y) = X(x)Y(y). \quad (2.28)$$

Подставив (2.28) в уравнение (2.24) и разделив на  $XY$ , получаем:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k^2 = 0. \quad (2.29)$$

Разделяем переменные и вводим постоянную разделения:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - k^2 = -\mu^2. \quad (2.30)$$

Сначала из (2.30) получаем уравнение для  $X$ :

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \mu^2 X = 0. \quad (2.31)$$

Ищем решение в виде  $e^{\lambda x}$ , откуда получаем:

$$\lambda = \pm i\mu, \quad (2.32)$$



то есть решение имеет вид

$$X = C_1 e^{i\mu x} + C_2 e^{-i\mu x}, \quad (2.33)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Теперь из (2.30) получаем уравнение для  $Y$ :

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + (k^2 - \mu^2) Y = 0. \quad (2.34)$$

Опять ищем решение в виде  $e^{\lambda y}$ , из чего получаем:

$$\lambda = \pm i \sqrt{k^2 - \mu^2}, \quad (2.35)$$

то есть решение уравнения (2.34) имеет вид

$$Y = C_3 e^{i\sqrt{k^2 - \mu^2} y} + C_4 e^{-i\sqrt{k^2 - \mu^2} y}, \quad (2.36)$$

где  $C_3$  и  $C_4$  — произвольные постоянные.

Постоянная  $\mu$  соответствует компоненте волнового числа вдоль оси  $Ox$ , так что можно ввести обозначение

$$\mu = k_x. \quad (2.37)$$

При этом полное волновое число  $k$  определяется соотношением:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad (2.38)$$

так что

$$\sqrt{k^2 - \mu^2} = k_y. \quad (2.39)$$

Введем вспомогательный угол  $\theta$ , определяемый условием

$$\theta = \arccos\left(\frac{k_x}{k}\right). \quad (2.40)$$

Очевидно, этот угол соответствует углу  $\theta$ , введенному на рис. 2.1.

При этом из (2.37)–(2.39) получаем выражения, сходные с (2.22)–(2.23):

$$k_x = k \cos \theta; \quad (2.41)$$

$$k_y = k \sin \theta. \quad (2.42)$$

С учетом (2.37) и (2.39) решения (2.33) и (2.36) принимают вид:

$$X = C_2 e^{i(k \cos \theta)x} + C_2 e^{-i(k \cos \theta)x}, \quad (2.43)$$

$$Y = C_3 e^{i(k \sin \theta)y} + C_4 e^{-i(k \sin \theta)y}. \quad (2.44)$$

Полное решение исходного уравнения (2.27) равно произведению (2.28) этих решений:

$$P = (C_1 e^{i(k \cos \theta)x} + C_2 e^{-i(k \cos \theta)x})(C_3 e^{i(k \sin \theta)y} + C_4 e^{-i(k \sin \theta)y}). \quad (2.45)$$

Для волны, распространяющейся в положительном направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  (то есть при  $\theta \geq 0$ ), а также соответствующей ей встречной волны, решение (2.45) принимает вид:

$$P = A e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} + B e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}. \quad (2.46)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Пользуясь для вычисления импеданса формулой (2.17), получаем:

$$Z_{as} = \frac{1}{\cos \theta} a \rho_0 \frac{Ae^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} + Be^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}}{Ae^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} - Be^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}} \quad (2.47)$$

или

$$Z_{as} = Z_{as0} \frac{Ae^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} + Be^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}}{Ae^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} - Be^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}}, \quad (2.48)$$

где

$$Z_{as0} = \frac{a \rho_0}{\cos \theta} = \frac{Z_{a0}}{\cos \theta}, \quad (2.49)$$

причем  $Z_{a0}$  определяется соотношением (2.20).

Таким образом, в этом случае обобщенный импеданс для двух встречных волн зависит как от координаты точки  $x$ , параметров среды и частоты волны через  $k$ , так и от угла  $\theta$  между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью  $Ox$ .

Введенный так обобщенный импеданс зависит от двух координат:  $x$  и  $y$ . В то же время, при решении граничных задач обычно рассматривается падение волны на плоскость, перпендикулярную оси  $Ox$ , то есть координата  $y$  лежит в этой плоскости. При этом полагается, что какая-либо зависимость амплитуды решения от координат в плоскости должна отсутствовать. Поэтому для решения таких задач в определениях (2.47) и (2.48) можно положить  $y = 0$ , в результате чего обобщенный импеданс принимает вид:

$$Z_{as} = \frac{a \rho_0}{\cos \theta} \frac{Ae^{-ikx \cos \theta} + Be^{ikx \cos \theta}}{Ae^{-ikx \cos \theta} - Be^{ikx \cos \theta}} \quad (2.50)$$

или

$$Z_{as} = Z_{as0} \frac{Ae^{-ikx \cos \theta} + Be^{ikx \cos \theta}}{Ae^{-ikx \cos \theta} - Be^{ikx \cos \theta}}, \quad (2.51)$$

где  $Z_{as0}$  определяется формулой (2.49).

## 2.4. Обобщенный импеданс для электромагнитной волны

Плоская электромагнитная волна в трехмерной изотропной среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$  является поперечной, то есть при жестко заданной декартовой системе координат  $Oxyz$  может распространяться в любом произвольном направлении относительно координатной оси  $Ox$ , а также иметь вдоль направления своего распространения произвольную поляризацию. Поэтому желательно рассмотреть распространение такой волны как вдоль оси  $Ox$ , так и наклонно к ней с учетом произвольности поляризации. Поставленная так задача слишком широка, поэтому рассмотрим некоторые важные для практики частные случаи.

### 2.4.1. Продольное распространение вдоль оси $Ox$

Рассмотрим сначала случай продольного (коллинеарного) распространения электромагнитной волны относительно оси  $Ox$ . В силу осевой симметрии задачи можно выбрать систему координат таким

образом, чтобы электрическое поле волны было направлено вдоль оси  $Oy$ . При этом в силу поперечного характера волны вектор ее магнитного поля будет направлен вдоль оси  $Oz$ . Схема взаимной ориентации векторов полей волн, распространяющихся в положительном (индекс «i») и отрицательном (индекс «r») направлениях оси  $Ox$  показана на рис. 2.2.

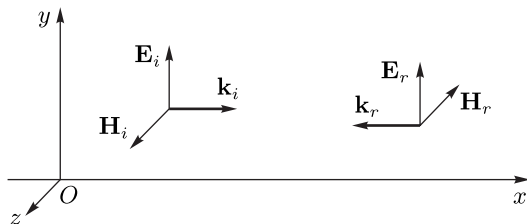


Рис. 2.2. Схема ориентации векторов электрического и магнитного полей волны при ее коллинеарном распространении относительно оси  $Ox$

Поскольку электрическое и магнитное поля волны однозначно связаны, ограничимся рассмотрением только  $y$  — компоненты электрического поля, волновое уравнение для которой имеет вид:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = 0. \quad (2.52)$$

Полагая

$$E_y = E_{y0} e^{i\omega t}, \quad (2.53)$$

получаем уравнение для координатной составляющей волны

$$\frac{\partial^2 E_{y0}}{\partial x^2} + k^2 E_{y0} = 0, \quad (2.54)$$

где введено классическое определение волнового числа  $k$  в виде:

$$k = \frac{\omega}{a} = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}. \quad (2.55)$$

Полное решение этого уравнения имеет вид суперпозиции волн прямого и обратного направлений:

$$E_{y0} = A e^{-ikx} + B e^{ikx}, \quad (2.56)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Воспользуемся определением электродинамического импеданса через электрическое поле, которое при единой для всех волн зависимости от времени  $e^{i\omega t}$  принимает вид (1.254):

$$Z_e = -i\omega \mu \mu_0 \cdot \frac{E_{y0}}{\partial E_{y0} / \partial x}, \quad (2.57)$$

для чего найдем производную

$$\frac{\partial E_{y0}}{\partial x} = -ik(Ae^{-ikx} - Be^{ikx}). \quad (2.58)$$

Подставляя (2.56) и (2.58) в (2.57) и учитывая (2.55), получаем:

$$Z_e = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Ae^{-ikx} + Be^{ikx}}{Ae^{-ikx} - Be^{ikx}}}. \quad (2.59)$$

Вводя «нулевой импеданс» с помощью обозначения

$$Z_{e0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}, \quad (2.60)$$

получаем:

$$Z_e = Z_{e0} \frac{Ae^{-ikx} + Be^{ikx}}{Ae^{-ikx} - Be^{ikx}}. \quad (2.61)$$

В таком виде эта формула аналогична (2.11) для одномерной волны с точностью до определения нулевых импедансов (2.10) и (2.60).

### 2.4.2. Наклонное распространение относительно оси $Ox$ , продольная поляризация

Рассмотрим теперь случай наклонного (неколлинеарного) распространения электромагнитной волны относительно оси  $Ox$ .

Будем называть плоскостью распространения волны плоскость, проходящую через волновой вектор волны  $\mathbf{k}$  и координатную ось  $Ox$ . Совместим координатную плоскость  $Oxy$  с плоскостью распространения и обозначим угол между вектором  $\mathbf{k}$  и осью  $Ox$  через  $\theta$ . Рассмотрим сначала случай продольной поляризации волны, то есть будем полагать, что ее вектор электрического поля лежит в плоскости распространения, то есть  $Oxy$ . При этом в силу поперечного характера волны вектор ее магнитного поля будет направлен вдоль оси  $Oz$ . Схема взаимной ориентации векторов полей волн, распространяющихся в положительном (индекс «i») и отрицательном (индекс «r») направлениях оси  $Ox$  показана на рис. 2.3.

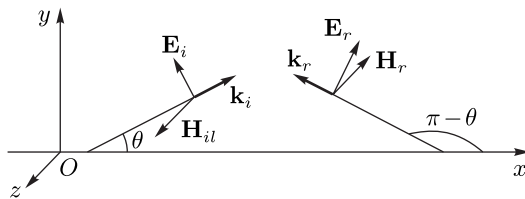


Рис. 2.3. Схема ориентации векторов электрического и магнитного полей волны продольной поляризации при неколлинеарном распространении относительно оси  $Ox$

При такой геометрии векторы электрического и магнитного полей обеих волн имеют вид:

$$\mathbf{E}_i = \{-E_{i0} \sin \theta, E_{i0} \cos \theta, 0\}; \quad (2.62)$$

$$\mathbf{H}_i = \{0, 0, H_{i0}\}; \quad (2.63)$$

$$\mathbf{E}_r = \{E_{r0} \sin \theta, E_{r0} \cos \theta, 0\}; \quad (2.64)$$

$$\mathbf{H}_r = \{0, 0, -H_{r0}\}. \quad (2.65)$$

Поскольку магнитное поле волны однозначно определяется ее электрическим полем, достаточно рассмотреть волновое уравнение для вектора электрического поля, координатная часть которого имеет вид:

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (2.66)$$

где дифференциальный оператор  $\Delta$  определяется соотношением (1.150).

Подобные же уравнения выполняются для любой компоненты вектора  $\mathbf{E}$ :

$$\Delta E_j + k_j^2 E_j = 0, \quad (2.67)$$

где  $j = x, y, z$ .

Выполняя разделение переменных, подобное проведенному в разделе 2.3.2, получаем решение этого уравнения в виде:

$$E_j = E_{ji} e^{-i(k_{ix}x + k_{iy}y + k_{iz}z)} + E_{jr} e^{i(k_{rx}x + k_{ry}y + k_{rz}z)}, \quad (2.68)$$

где  $k_{ij}$ ,  $k_{rj}$ ,  $k_{iz}$  — компоненты волновых векторов, играющие роль постоянных разделения.

При этом, как можно видеть из рис. 2.3, компоненты волновых векторов имеют вид:

$$k_{ix} = k \cos \theta; \quad (2.69)$$

$$k_{iy} = k \sin \theta; \quad (2.70)$$

$$k_{iz} = 0; \quad (2.71)$$

$$k_{rx} = -k \cos \theta; \quad (2.72)$$

$$k_{ry} = k \sin \theta; \quad (2.73)$$

$$k_{rz} = 0. \quad (2.74)$$

Как и в случае наклонного распространения акустической волны в жидкости, положим  $y$  и  $z$  равными нулю. Таким образом, аналогично (2.16), представим сумму электрических полей двух волн прямого и обратного направлений относительно оси  $Ox$  в виде:

$$E_{y0} = A e^{-ikx \cos \theta} + B e^{ikx \cos \theta}, \quad (2.75)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Найдем производную

$$\frac{\partial E_{y0}}{\partial x} = -ik \cos \theta (A e^{-ikx \cos \theta} - B e^{ikx \cos \theta}), \quad (2.76)$$

после чего воспользуемся определением импеданса (2.57), в результате чего получим:

$$Z_{el} = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \frac{Ae^{-ikx \cos \theta} + Be^{ikx \cos \theta}}{Ae^{-ikx \cos \theta} - Be^{ikx \cos \theta}} \quad (2.77)$$

или

$$Z_{el} = Z_{el0} \frac{Ae^{-ikx \cos \theta} + Be^{ikx \cos \theta}}{Ae^{-ikx \cos \theta} - Be^{ikx \cos \theta}}, \quad (2.78)$$

где

$$Z_{el0} = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{Z_{e0}}{\cos \theta}, \quad (2.79)$$

где  $Z_{e0}$  определяется выражением (2.60).

В таком виде эта формула аналогична (2.11) для одномерной волны, где волновое число в показателях экспонент умножается на  $\cos \theta$ , а нулевой импеданс определяется формулой (2.79).

### 2.4.3. Наклонное распространение относительно оси $Ox$ , поперечная поляризация

Рассмотрим теперь случай наклонного (неколлинеарного) распространения электромагнитной волны относительно оси  $Ox$ , когда волна имеет поперечную относительно плоскости  $Oxy$  поляризацию. При этом вектор электрического поля волны перпендикулярен плоскости распространения и направлен вдоль оси  $Oz$ , а вектор магнитного поля лежит в плоскости  $Oxy$ . Схема взаимной ориентации векторов полей волн, распространяющихся в положительном (индекс «i») и отрицательном (индекс «r») направлениях оси  $Ox$  показана на рис. 2.4.

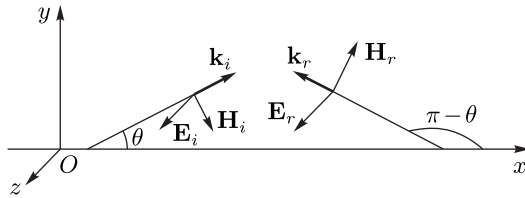


Рис. 2.4. Схема ориентации векторов электрического и магнитного полей волны поперечной поляризации при неколлинеарном распространении относительно оси  $Ox$

При такой геометрии векторы электрического и магнитного полей обеих волн имеют вид:

$$\mathbf{E}_i = \{0, 0, E_{i0}\}; \quad (2.80)$$

$$\mathbf{H}_i = \{H_{i0} \sin \theta, -H_{i0} \cos \theta, 0\}; \quad (2.81)$$

$$\mathbf{E}_r = \{0, 0, E_{i0}\}; \quad (2.82)$$

$$\mathbf{H}_r = \{H_{i0} \sin \theta, H_{i0} \cos \theta, 0\}. \quad (2.83)$$

При этом, как можно видеть из рис. 2.4, компоненты волновых векторов имеют вид:

$$k_{ix} = k \cos \theta; \quad (2.84)$$

$$k_{iy} = k \sin \theta; \quad (2.85)$$

$$k_{iz} = 0; \quad (2.86)$$

$$k_{rx} = -k \cos \theta; \quad (2.87)$$

$$k_{ry} = k \sin \theta; \quad (2.88)$$

$$k_{rz} = 0. \quad (2.89)$$

Как и в случае наклонного распространения акустической волны в жидкости, положим  $y$  и  $z$  равными нулю.

Будем исходить из определения импеданса через магнитное поле в виде (1.221):

$$Z_m = -\frac{i}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \frac{\partial H_y / \partial x}{H_y}. \quad (2.90)$$

Для магнитного поля совокупность двух волн прямого и обратного направлений относительно оси  $Ox$  имеет вид:

$$H_{y0} = A e^{-ikx \cdot \cos \theta} - B e^{ikx \cdot \cos \theta}, \quad (2.91)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Здесь предполагается, что у встречной волны направление магнитного поля противоположно направлению магнитного поля прямой волны, поэтому при условии положительности обеих произвольных постоянных перед второй постоянной поставлен знак минус.

Найдем производную

$$\frac{\partial H_{y0}}{\partial x} = -ik \cos \theta (A e^{-ikx \cos \theta} + B e^{ikx \cos \theta}), \quad (2.92)$$

после чего воспользуемся определением импеданса (2.90), в результате чего получим:

$$Z_{et} = \cos \theta \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} \frac{A e^{-ikx \cos \theta} + B e^{ikx \cos \theta}}{A e^{-ikx \cos \theta} - B e^{ikx \cos \theta}}, \quad (2.93)$$

или

$$Z_{et} = Z_{et0} \frac{A e^{-ikx \cos \theta} + B e^{ikx \cos \theta}}{A e^{-ikx \cos \theta} - B e^{ikx \cos \theta}}, \quad (2.94)$$

где нулевой импеданс  $Z_{et0}$  имеет вид:

$$Z_{et0} = \cos \theta \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} = Z_{e0} \cos \theta, \quad (2.95)$$

где  $Z_{e0}$  определяется выражением (2.60).

## 2.5. Обобщенный импеданс для различных волновых процессов

Для удобства сравнения обобщенного импеданса для различных волновых процессов запишем все полученные формулы еще раз в одном месте в едином ключе.

### 2.5.1. Одномерная волна

Формулы (2.11), (2.10):

$$Z_u = Z_{u0} \frac{Ae^{-ikx} + Be^{ikx}}{Ae^{-ikx} - Be^{ikx}}, \quad (2.96)$$

где

$$Z_{u0} = \frac{1}{k}. \quad (2.97)$$

### 2.5.2. Акустическая волна, продольное распространение

Формулы (2.21), (2.20):

$$Z_a = Z_{a0} \frac{Ae^{-ikx} + Be^{ikx}}{Ae^{-ikx} - Be^{ikx}}, \quad (2.98)$$

где

$$Z_{a0} = a\rho_0. \quad (2.99)$$

### 2.5.3. Акустическая волна, наклонное распространение

Формулы (2.51), (2.49):

$$Z_{as} = Z_{as0} \frac{Ae^{-ikx \cos \theta} + Be^{ikx \cos \theta}}{Ae^{-ikx \cos \theta} - Be^{ikx \cos \theta}}, \quad (2.100)$$

где

$$Z_{as0} = \frac{a\rho_0}{\cos \theta} = \frac{Z_{a0}}{\cos \theta}. \quad (2.101)$$

### 2.5.4. Электромагнитная волна, продольное распространение

Формулы (2.61), (2.60):

$$Z_e = Z_{e0} \frac{Ae^{-ikx} + Be^{ikx}}{Ae^{-ikx} - Be^{ikx}}, \quad (2.102)$$

где

$$Z_{e0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (2.103)$$

### 2.5.5. Электромагнитная волна, наклонное распространение, продольная поляризация

Формулы (2.78), (2.79):

$$Z_{el} = Z_{el0} \frac{Ae^{-ikx \cos \theta} + Be^{ikx \cos \theta}}{Ae^{-ikx \cos \theta} - Be^{ikx \cos \theta}}, \quad (2.104)$$

где

$$Z_{el0} = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{Z_{e0}}{\cos \theta}. \quad (2.105)$$



### 2.5.6. Электромагнитная волна, наклонное распространение, поперечная поляризация

Формулы (2.94), (2.95):

$$Z_{et} = Z_{et0} \frac{Ae^{-ikx \cos \theta} + Be^{ikx \cos \theta}}{Ae^{-ikx \cos \theta} - Be^{ikx \cos \theta}}, \quad (2.106)$$

где нулевой импеданс  $Z_{et0}$  имеет вид

$$Z_{et0} = \cos \theta \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = Z_{e0} \cos \theta. \quad (2.107)$$

### 2.5.7. Общий вид формулы для импеданса

Из проделанного рассмотрения можно видеть, что общая формула для обобщенного импеданса имеет вид:

$$Z = Z_{00} \frac{Ae^{-\alpha} + Be^{\alpha}}{Ae^{-\alpha} - Be^{\alpha}}, \quad (2.108)$$

где  $Z_{00}$  — нулевой импеданс,  $\alpha$  — показатель экспоненты,  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Нулевой импеданс для различных процессов имеет свой специфический вид, однако физический смысл во всех случаях является общим и состоит в сопротивлении среды распространению волны (раздел 1.11)

## 2.6. Сводная таблица импедансов

Сведем параметры формулы обобщенного импеданса (2.108) для разных типов волн в единую таблицу № 2.1.

Таблица 2.1. Обобщенный импеданс для различных типов волн

Параметры \ Волны	Нулевой импеданс $Z_{00}$	Показатель экспоненты $\alpha$	Волновое число $k$
Одномерная	$\frac{1}{k}$	$ikx$	$\frac{\omega}{a}$
Акустическая коллинеарная	$a\rho_0$	$ikx$	$\frac{\omega}{a}$
Акустическая наклонная	$\frac{a\rho_0}{\cos \theta}$	$ikx \cdot \cos \theta$	$\frac{\omega}{a}$
Электромагнитная коллинеарная	$\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$	$ikx$	$\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$
Электромагнитная продольная	$\frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$	$ikx \cdot \cos \theta$	$\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$
Электромагнитная поперечная	$\cos \theta \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$	$ikx \cdot \cos \theta$	$\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$

## Выводы по главе 2

Данная глава посвящена введению понятия обобщенного импеданса для различных видов волн. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Приведены основания для введения обобщенного импеданса, состоящие в необходимости рассмотрения волнового процесса в целом, свойства которого определяются не только параметрами среды, но также и параметрами распространяющихся волн прямого и обратного направлений.

2. Введено понятие импеданса для одномерной волны как отношения суммарного поля прямой и встречной волн к производной от такого поля по координате. В качестве коэффициента для такого отношения положен нулевой импеданс, равный величине, обратной волновому числу распространяющейся волны. Показано, что введенный таким образом обобщенный импеданс для одной волны зависит от волнового числа и при заданной частоте определяется параметрами материала среды, а для двух встречных волн кроме того еще зависит от соотношения амплитуд этих волн, а также от координаты или положения точки начала отсчета.

3. Получен обобщенный импеданс для акустической волны. Показано, что он определяется тем же соотношением, что и для одномерной волны с учетом нулевого импеданса, характерного для акустики. Рассмотрены случаи прямого (коллинеарного) и наклонного (неколлинеарного) распространения прямой и обратной волн. Показано, что при неколлинеарном распространении обобщенный импеданс имеет ту же форму, что и при коллинеарном, с тем отличием, что в его определении участвуют проекции полного волнового числа на оси системы координат.

4. Получен обобщенный импеданс для электромагнитных волн продольной и поперечной поляризации прямого и обратного направлений при коллинеарном и неколлинеарном распространении. Показано, что во всех этих случаях структура выражения для обобщенного импеданса имеет сходный характер, определяемый геометрическими параметрами распространения.

5. Получена формула, обобщающая понятие импеданса для всех рассмотренных случаев. Приведена сводная таблица обобщенных импедансов и коэффициентов, отражающих специфику каждого из видов волн с учетом геометрии распространения.

## Глава 3

# ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ РАБОТЫ С ОБОБЩЕННЫМ ИМПЕДАНСОМ

Глава посвящена краткому обзору основных способов применения обобщенного импеданса для решения задач о распространении волн в простых структурах. В качестве примера избрана одномерная волна. Рассмотрено падение такой волны на одну границу и распространение через структуру из трех сред, разделенных двумя границами. Приведен прямой метод импеданса для одной и двух границ, а также метод последовательного пересчета входного и выходного импедансов. Рассмотрение проведено для волны прямого и встречного направлений. Полученные результаты сравниваются с решениями тех же задач прямым методом.

В главе частично использован материал монографии [59, стр. 45–67], сравнение с результатами, получаемыми прямым методом, выполнено на основе монографий [57] и [1]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 3.1. Распространение одномерной волны через одну и две границы

Рассмотрим теперь на примере одномерной волны, как понятие импеданса применяется для решения задач о распространении волны через структуру, содержащую однородные слои, разделенные плоскопараллельными границами. Сначала рассмотрим частные случаи одной и двух границ.

#### 3.1.1. Одна граница

Рассмотрим сначала падение волны на одну границу, схематически иллюстрируемое рис. 3.1.

Здесь утолщенной вертикальной линией при  $x = 0$  показана граница, разделяющая две области 1 и 2, заполненные однородными средами с такими же номерами. Волна  $A$  — падающая,  $B$  — отраженная,  $C$  — проходящая,  $D$  — встречная волна в среде 2, обусловленная, например, отражением проходящей волны от каких-либо последующих границ.

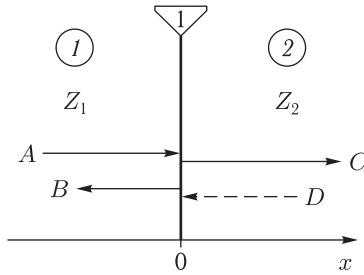


Рис. 3.1. Падение волны на одну границу

Граничные условия при  $x = 0$  требуют непрерывности функции поля и ее производной:

$$U_1|_{x=0} = U_2|_{x=0}; \quad (3.1)$$

$$\frac{dU_1}{dx}|_{x=0} = \frac{dU_2}{dx}|_{x=0}. \quad (3.2)$$

При решении задач методом импеданса вместо равенства производных полагается эквивалентное ему равенство импедансов, то есть граничные условия принимают вид:

$$U_1|_{x=0} = U_2|_{x=0}; \quad (3.3)$$

$$Z_1|_{x=0} = Z_2|_{x=0}. \quad (3.4)$$

В областях 1 и 2 функции поля имеют вид:

$$U_1 = Ae^{-ik_1x} + Be^{ik_1x}; \quad (3.5)$$

$$U_2 = Ce^{-ik_2x} + De^{ik_2x}. \quad (3.6)$$

Соответствующие импедансы равны:

$$Z_1 = Z_{10} \frac{Ae^{-ik_1x} + Be^{ik_1x}}{Ae^{-ik_1x} - Be^{ik_1x}}; \quad (3.7)$$

$$Z_2 = Z_{20} \frac{Ce^{-ik_2x} + De^{ik_2x}}{Ce^{-ik_2x} - De^{ik_2x}}, \quad (3.8)$$

где нулевые импедансы равны

$$Z_{10} = \frac{1}{k_1}; \quad (3.9)$$

$$Z_{20} = \frac{1}{k_2}. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.5)–(3.8) в граничные условия (3.3)–(3.4), получаем систему уравнений:

$$A + B = C + D; \quad (3.11)$$

$$Z_{10} \cdot \frac{A + B}{A - B} = Z_{20} \cdot \frac{C + D}{C - D}. \quad (3.12)$$

Главной задачей является нахождение амплитуд отраженной  $B$  и проходящей  $C$  волн, выходящих из границы, если известны амплитуды волн  $A$  и  $D$ , падающих на границу. Таким образом, из системы (3.11)–(3.12) надо выразить  $B$  и  $C$  через  $A$  и  $D$ . Для этого разделим первое уравнение на второе и сгруппируем в левой части слагаемые, содержащие неизвестные:

$$B - C = -A + D; \quad (3.13)$$

$$BZ_{20} + CZ_{10} = AZ_{20} + DZ_{10}. \quad (3.14)$$

Решая эту систему, получаем амплитуды отраженной и проходящей волн в виде:

$$B = -\frac{Z_{10} - Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}}A + \frac{2Z_{10}}{Z_{10} + Z_{20}}D; \quad (3.15)$$

$$C = \frac{2Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}}A + \frac{Z_{10} - Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}}D. \quad (3.16)$$

Заменяя нулевые импедансы их выражениями через волновое число (3.9)–(3.10), получаем:

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A + \frac{2k_2}{k_1 + k_2}D; \quad (3.17)$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A - \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}D. \quad (3.18)$$

В отсутствие встречной волны, то есть при  $D = 0$ , из (3.17) и (3.18) получаем:

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A; \quad (3.19)$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A. \quad (3.20)$$

Можно видеть, что (3.17)–(3.20) совпадают с аналогичными выражениями для амплитуд, полученными прямым методом [57, стр. 24, форм. (1.78)–(1.79)], [1, стр. 77, форм. (2.18)–(2.19)].

### 3.1.2. Две границы

Рассмотрим теперь падение волны на две границы, схематически иллюстрируемое рис. 3.2.

Здесь утолщенными вертикальными линиями при  $x = 0$  и  $x = -d$  показаны границы, разделяющие среды 1, 2 и 3. Волна  $A$  — падающая,  $B$  — отраженная,  $C$  и  $D$  — волны внутри среды 2,  $E$  — проходящая волна,  $F$  — встречная волна в среде 3, обусловленная, например, отражением проходящей волны  $E$  от каких-либо последующих границ.

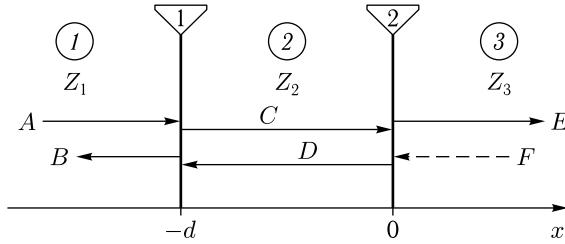


Рис. 3.2. Падение волны на две границы

В областях 1–3 функции поля имеют вид:

$$U_1 = Ae^{-ik_1x} + Be^{ik_1x}; \quad (3.21)$$

$$U_2 = Ce^{-ik_2x} + De^{ik_2x}; \quad (3.22)$$

$$U_3 = Ee^{-ik_3x} + Fe^{ik_3x}. \quad (3.23)$$

Их производные имеют вид:

$$\frac{dU_1}{dx} = -Aik_1e^{-ik_1x} + Bik_1e^{ik_1x}; \quad (3.24)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -Cik_2e^{-ik_2x} + Dik_2e^{ik_2x}; \quad (3.25)$$

$$\frac{dU_3}{dx} = -Eik_3e^{-ik_3x} + Fik_3e^{ik_3x}. \quad (3.26)$$

Соответствующие импедансы равны:

$$Z_1 = Z_{10} \frac{Ae^{-ik_1x} + Be^{ik_1x}}{Ae^{-ik_1x} - Be^{ik_1x}}; \quad (3.27)$$

$$Z_2 = Z_{20} \frac{Ce^{-ik_2x} + De^{ik_2x}}{Ce^{-ik_2x} - De^{ik_2x}}; \quad (3.28)$$

$$Z_3 = Z_{30} \frac{Ee^{-ik_3x} + Fe^{ik_3x}}{Ee^{-ik_3x} - Fe^{ik_3x}}, \quad (3.29)$$

где нулевые импедансы имеют вид:

$$Z_{10} = \frac{1}{k_1}; \quad (3.30)$$

$$Z_{20} = \frac{1}{k_2}; \quad (3.31)$$

$$Z_{30} = \frac{1}{k_3}. \quad (3.32)$$

Граничные условия — равенство амплитуд и импедансов на границах раздела сред — имеют вид:

$$U_1|_{x=-d} = U_2|_{x=-d}; \quad (3.33)$$

$$Z_1|_{x=-d} = Z_2|_{x=-d}; \quad (3.34)$$

$$U_2|_{x=0} = U_3|_{x=0}; \quad (3.35)$$

$$Z_2|_{x=0} = Z_3|_{x=0}. \quad (3.36)$$

### 3.2. Последовательное применение прямого метода импеданса к двум границам

Поскольку к предыдущей задаче здесь добавляется еще одна граница со стороны отрицательных значений координаты  $x$ , то рассмотрим получение решения путем последовательного применения граничных условий для границы, которая имела изначально, и границы, которая добавлена, то есть от границы 2 к границе 1.

Итак, сначала рассмотрим граничные условия на границе 2, соответствующие  $x = 0$ . Подставляя функции полей (3.22), (3.23) и импедансы (3.28), (3.29) в условия (3.35)–(3.36), получаем:

$$C + D = E + F; \quad (3.37)$$

$$Z_{20} \frac{C + D}{C - D} = Z_{30} \frac{E + F}{E - F}. \quad (3.38)$$

Здесь неизвестными полагаются амплитуда отраженной волны  $D$  и амплитуда проходящей —  $E$ . Известны амплитуды падающей волны  $C$  и встречной волны  $F$ , а также импедансы второй и третьей сред  $Z_{20}$  и  $Z_{30}$ . Таким образом, из системы (3.37)–(3.38) надо выразить  $D$  и  $E$  через  $C$  и  $F$ . Для этого разделим первое уравнение на второе и сгруппируем слагаемые, содержащие неизвестные, в левой части:

$$D - E = -C + F; \quad (3.39)$$

$$DZ_{30} + EZ_{20} = CZ_{30} + FZ_{20}. \quad (3.40)$$

Эта система по структуре полностью аналогична системе (3.13)–(3.14). Поэтому, решая ее тем же способом, получаем:

$$D = -\frac{Z_{20} - Z_{30}}{Z_{20} + Z_{30}}C + \frac{2Z_{20}}{Z_{20} + Z_{30}}F; \quad (3.41)$$

$$E = \frac{2Z_{30}}{Z_{20} + Z_{30}}C + \frac{Z_{20} - Z_{30}}{Z_{20} + Z_{30}}F. \quad (3.42)$$

Рассмотрим теперь граничные условия на границе 1, соответствующие  $x = -d$ . Подставляя функции полей (3.21), (3.22) и импедансы (3.27), (3.28) в условия (3.33)–(3.34), получаем:

$$Ae^{ik_1d} + Be^{-ik_1d} = Ce^{ik_2d} + De^{-ik_2d}; \quad (3.43)$$

$$Z_{10} \frac{Ae^{ik_1d} + Be^{-ik_1d}}{Ae^{ik_1d} - Be^{-ik_1d}} = Z_{20} \frac{Ce^{ik_2d} + De^{-ik_2d}}{Ce^{ik_2d} - De^{-ik_2d}}. \quad (3.44)$$

Здесь неизвестными полагаются амплитуда отраженной волны  $B$  и амплитуда проходящей —  $C$ . Известны амплитуды падающей волны  $A$  и встречной волны  $D$ , а также импедансы первой и второй сред  $Z_{10}$  и  $Z_{20}$ . Таким образом, из системы (3.43)–(3.44) надо выразить  $B$

и  $C$  через  $A$  и  $D$ . Для этого разделим первое уравнение на второе и сгруппируем слагаемые, содержащие неизвестные, в левой части:

$$Be^{-ik_1d} - Ce^{ik_2d} = -Ae^{ik_1d} + De^{-ik_2d}, \quad (3.45)$$

$$BZ_{20}e^{-ik_1d} + CZ_{10}e^{ik_2d} = AZ_{20}e^{ik_1d} + DZ_{10}e^{-ik_2d}. \quad (3.46)$$

Эта система по структуре полностью аналогична системе (3.13)–(3.14). Поэтому, решая ее тем же способом, получаем:

$$B = -\frac{Z_{10} - Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}}Ae^{2ik_1d} + \frac{2Z_{10}}{Z_{10} + Z_{20}}De^{i(k_1 - k_2)d}, \quad (3.47)$$

$$C = \frac{2Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}}Ae^{i(k_1 - k_2)d} + \frac{Z_{10} - Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}}De^{-2ik_2d}. \quad (3.48)$$

Таким образом, получены две одинаковые по структуре системы (3.41)–(3.42) и (3.47)–(3.48). Согласно условиям основной задачи, заданными являются амплитуды падающих прямой  $A$  и встречной  $F$  волн, а подлежащими определению — амплитуды отраженной  $B$  и проходящей  $E$  волн. При этом промежуточными переменными, подлежащими исключению, являются амплитуды  $C$  и  $D$  волн, распространяющихся в среде 2 в прямом и обратном направлениях.

Для уменьшения громоздкости расчета введем вспомогательные обозначения:

$$\alpha = -\frac{Z_{20} - Z_{30}}{Z_{20} + Z_{30}}; \quad (3.49)$$

$$\beta = \frac{2Z_{20}}{Z_{20} + Z_{30}}; \quad (3.50)$$

$$\gamma = \frac{2Z_{30}}{Z_{20} + Z_{30}}; \quad (3.51)$$

$$\delta = \frac{Z_{20} - Z_{30}}{Z_{20} + Z_{30}}; \quad (3.52)$$

$$\varepsilon = -\frac{Z_{10} - Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}}e^{2ik_1d}; \quad (3.53)$$

$$\varphi = \frac{2Z_{10}}{Z_{10} + Z_{20}}e^{i(k_1 - k_2)d}; \quad (3.54)$$

$$\xi = \frac{2Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}}e^{i(k_1 - k_2)d}; \quad (3.55)$$

$$\eta = \frac{Z_{10} - Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}}e^{-2ik_2d}. \quad (3.56)$$

С этими обозначениями объединенная система (3.41)–(3.42) и (3.47)–(3.48) принимает вид:

$$D = \alpha C + \beta F; \quad (3.57)$$

$$E = \gamma C + \delta F; \quad (3.58)$$

$$B = \varepsilon A + \varphi D; \quad (3.59)$$

$$C = \xi A + \eta D. \quad (3.60)$$



Рассмотрим сначала более простой случай, полагая  $F = 0$ , то есть встречная волна в среде 3 отсутствует. При этом система (3.57)–(3.60) принимает вид:

$$D = \alpha C; \quad (3.61)$$

$$E = \gamma C; \quad (3.62)$$

$$B = \varepsilon A + \varphi D; \quad (3.63)$$

$$C = \xi A + \eta D. \quad (3.64)$$

Здесь задана только амплитуда  $A$ , а подлежат определению амплитуды  $B$  и  $E$ , то есть амплитуды  $C$  и  $D$  надо исключить.

Выразим  $C$  через  $E$  из (3.62), после чего подставим полученное выражение в (3.61), в результате чего  $C$  и  $D$  будут выражены через  $E$ . Подставим теперь эти значения  $C$  и  $D$  в уравнения (3.63) и (3.64), в результате чего получим систему из двух уравнений, содержащую только  $A$ ,  $B$  и  $E$ :

$$B = \varepsilon A + \frac{\alpha\varphi}{\gamma} E; \quad (3.65)$$

$$\frac{1}{\gamma} E = \xi A + \frac{\alpha\eta}{\gamma} E. \quad (3.66)$$

В этой системе  $A$  является заданным, а  $B$  и  $E$  подлежат определению. Решая эту систему, получаем:

$$B = \left( \varepsilon + \frac{\alpha\varphi\xi}{1 - \alpha\eta} \right) A; \quad (3.67)$$

$$E = \frac{\gamma\xi}{1 - \alpha\eta} A. \quad (3.68)$$

Подставляя вспомогательные обозначения (3.49)–(3.56), получаем амплитуды отраженной  $B$  и проходящей  $E$  волн в виде:

$$B = - \frac{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}} A e^{2ik_1d}, \quad (3.69)$$

$$E = \frac{4Z_{20}Z_{30}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}} A e^{ik_1d}. \quad (3.70)$$

В этих выражениях при  $A$  присутствуют экспоненциальные множители вида  $e^{2ik_1d}$  и  $e^{ik_1d}$ , которые, в случае комплексного волнового числа  $k_1$  (то есть при наличии затухания волны в среде 1), при увеличении  $d$  дают расходимость. Это получается из-за того, что решение ищется в виде (3.21)–(3.23), то есть таким образом, что фаза всех волн отсчитывается от точки  $x = 0$ . Для устранения упомянутой расходимости при задании предполагаемого вида решения надо произвести нормировку на точку исхода волны, как это подробно показано в работах [57, стр. 25–31], [1, стр. 112–117]. При этом

экспоненты пропадают и амплитуды отраженной  $B$  и проходящей  $E$  волн принимают вид:

$$B = -\frac{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}}A; \quad (3.71)$$

$$E = \frac{4Z_{20}Z_{30}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}}A. \quad (3.72)$$

Чтобы получить решение одномерной задачи в окончательном виде, надо импедансы заменить волновыми числами в соответствии с формулами (3.30)–(3.32). В результате получаем:

$$B = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}A; \quad (3.73)$$

$$E = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}A. \quad (3.74)$$

Можно видеть, что эти формулы совпадают с аналогичными выражениями, полученными прямым методом [57, стр. 34, форм. (2.2)–(2.10)], [1, стр. 111, форм. (3.25)–(3.28)].

Рассмотрим теперь полный случай, когда в среде 3 имеется встречная волна, то есть  $F \neq 0$ . При этом будем рассматривать полную систему (3.57)–(3.60), где заданными считаются амплитуды  $A$  и  $F$ , причем надо определить амплитуды  $B$  и  $E$ , то есть амплитуды  $C$  и  $D$  по-прежнему подлежат исключению:

$$D = \alpha C + \beta F; \quad (3.75)$$

$$E = \gamma C + \delta F; \quad (3.76)$$

$$B = \varepsilon A + \varphi D; \quad (3.77)$$

$$C = \xi A + \eta D. \quad (3.78)$$

Путь решения аналогичен предыдущему. То есть сначала из (3.76) выражаем  $C$ , подставляем полученное выражение в (3.75), откуда находим  $D$  через  $E$  и  $F$ . Подставляя  $D$  в (3.77), получаем выражение  $B$  через  $A$ ,  $E$  и  $F$ . Подставляя полученные выражения для  $C$  и  $D$  в (3.78), получаем выражение, связывающее  $E$  с  $A$  и  $F$ . Таким образом, получаем выражения для  $B$  и  $E$  в виде:

$$B = \left( \varepsilon + \frac{\alpha\varphi\xi}{1 - \alpha\eta} \right) A + \frac{\beta\varphi}{1 - \alpha\eta} F; \quad (3.79)$$

$$E = \frac{\gamma\xi}{1 - \alpha\eta} A + \left( \delta + \frac{\beta\gamma\eta}{1 - \alpha\eta} \right) F. \quad (3.80)$$

Первые слагаемые обоих этих выражений совпадают с (3.67) и (3.68) и описывают те части амплитуд отраженной и проходящей волн, которые обусловлены падающей волной прямого направления с амплитудой  $A$ . Вторые слагаемые отражают вклад в амплитуду отраженной и проходящей волн за счет падения встречной волны

с амплитудой  $F$ . Подставляя значения вспомогательных обозначений в соответствии с (3.49)–(3.56) и опуская экспоненты, обусловленные отсутствием нормировки, получаем амплитуды отраженной и проходящей волн в виде:

$$B = -\frac{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}}A + \frac{4Z_{20}Z_{30}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}}F; \quad (3.81)$$

$$E = \frac{4Z_{20}Z_{30}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}}A + \frac{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{-ik_2d}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}}F. \quad (3.82)$$

Заменяя нулевые импедансы их выражениями через волновые числа (3.30)–(3.32), получаем:

$$B = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}A + \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}F; \quad (3.83)$$

$$E = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}A + \frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{-ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}F. \quad (3.84)$$

Как и (3.73)–(3.74), эти формулы совпадают с аналогичными выражениями для одномерной волны, полученными прямым методом [57, стр. 44–45, форм. (3.19)–(3.27)], [1, стр. 116, форм. (3.54)–(3.57)].

### 3.3. Прямой метод импеданса для двух границ

Описанный здесь последовательный метод импеданса состоит в последовательном составлении двух систем (3.41)–(3.42) и (3.47)–(3.48), последовательно решаемых сходным образом. Однако процедуры получения систем уравнений (3.39)–(3.40) и (3.45)–(3.46) и вытекающих из них систем (3.41)–(3.42) и (3.47)–(3.48), основанные на подстановке решений в независимые граничные условия, также являются взаимно независимыми. Поэтому результирующую систему (3.57)–(3.60), полагая заданными амплитуды  $A$  и  $F$ , можно привести к единой системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ :

$$B - \varphi D = \varepsilon A; \quad (3.85)$$

$$C - \eta D = \xi A; \quad (3.86)$$

$$-\alpha C + D = \beta F; \quad (3.87)$$

$$-\gamma C + E = \delta F. \quad (3.88)$$

Решение этой системы позволяет непосредственно выразить амплитуды  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  через заданные амплитуды  $A$  и  $F$ .

Таблицы коэффициентов системы (3.85)–(3.88) имеют вид:

$B$	$C$	$D$	$E$	$A, F$	(3.89)
1	0	$-\varphi$	0	$\varepsilon A$	
0	1	$-\gamma$	0	$\xi A$	
0	$-\alpha$	1	0	$\beta F$	
0	$-\gamma$	0	1	$\delta F$	

Используя метод Крамера [122, стр. 45, форм. (1.9-2)–(1.9-5)], получаем решение в виде:

$$B = \left( \varepsilon + \frac{\alpha\varphi\xi}{1 - \alpha\eta} \right) A + \frac{\beta\varphi}{1 - \alpha\eta} F; \quad (3.90)$$

$$C = \frac{\xi}{1 - \alpha\eta} A + \frac{\beta\eta}{1 - \alpha\eta} F; \quad (3.91)$$

$$D = \frac{\alpha\xi}{1 - \alpha\eta} A + \frac{\beta}{1 - \alpha\eta} F; \quad (3.92)$$

$$E = \frac{\gamma\xi}{1 - \alpha\eta} A + \left( \delta + \frac{\beta\gamma\eta}{1 - \alpha\eta} \right) F. \quad (3.93)$$

Первое и последнее из этих выражений — амплитуды  $B$  и  $E$ , совпадают с (3.79) и (3.80). При этом дополнительно получены амплитуды  $C$  и  $D$ . В записи через импедансы выражения для  $B$  и  $E$  совпадают с (3.81) и (3.82), амплитуды  $C$  и  $D$  с точностью до нормировки имеют вид:

$$C = \frac{2Z_{20}(Z_{20} + Z_{30})}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}} A + \frac{2Z_{20}(Z_{10} - Z_{20})e^{-ik_2d}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}} F; \quad (3.94)$$

$$D = -\frac{2Z_{20}(Z_{20} - Z_{30})}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}} A + \frac{2Z_{20}(Z_{10} + Z_{20})e^{ik_2d}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}} F. \quad (3.95)$$

Переходя от импедансов к волновым числам, получаем:

$$C = \frac{2k_1(k_2 + k_3)e^{-ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}} A - \frac{2k_3(k_1 - k_2)}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}} F; \quad (3.96)$$

$$D = \frac{2k_1(k_2 - k_3)}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}} A + \\ + \frac{2k_3(k_1 + k_2)e^{-ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}} F. \quad (3.97)$$

Таким образом, по сравнению с последовательным, прямой метод импеданса позволяет получить кроме амплитуд  $B$  и  $E$  внешних выходящих волн, также амплитуды внутренних волн  $C$  и  $D$ , распространяющихся между границами 1 и 2.

**Замечание.** Заметим, что формулы (3.71)–(3.72), (3.81)–(3.82), (3.94)–(3.95), по форме совпадают с аналогичными выражениями, полученными при решении электродинамической задачи прямым методом [1, стр. 129, форм. (3.174)–(3.177)]. Таким образом, решая одномерную задачу методом импеданса, мы автоматически получили амплитуды волн для электродинамической задачи о нормальном падении на две границы прямой и встречной электромагнитных волн.

### 3.4. Метод последовательных вычислений

Описанный в предыдущем разделе прямой метод импеданса хотя и является универсальным в том отношении, что позволяет найти амплитуды всех волн, но при числе сред более трех, из-за необходимости раскрытия определителей высоких порядков, приводит к весьма громоздким вычислениям, объем которых растет подобно факториалу от числа границ.

Поэтому представляет интерес найти метод, пусть и не обладающий полной универсальностью, но позволяющий сократить вычисления.

К таковому можно отнести метод последовательных вычислений, основанный на введении понятий входного и выходного импедансов. Здесь обратимся к рассмотрению одномерной волны, в основном следуя общей схеме рассуждений для акустической волны, описанной в работе [4, стр. 15–17].

#### 3.4.1. Метод входного и выходного импедансов

Согласно (3.28), общее выражение для импеданса в среде 2 имеет вид:

$$Z_2 = Z_{20} \frac{C e^{-ik_2x} + D e^{ik_2x}}{C e^{-ik_2x} - D e^{ik_2x}}. \quad (3.98)$$

Это выражение справедливо везде между границами 1 и 2, то есть во всем интервале значений координаты от  $x = -d$  до  $x = 0$  и от направления распространения волны никак не зависит.

Отнесем сначала определение импеданса к распространению волны в положительном направлении оси  $Ox$ , в соответствии с чем будем называть импеданс на начальной границе какого-либо участка однородной

среды — «входным» по отношению к этому участку, а на ее конечной границе — «выходным».

Таким образом, входной импеданс в среде 2 равен:

$$Z_2^{(\text{in})} = Z_2|_{x=-d} = Z_{20} \frac{Ce^{ik_2d} + De^{-ik_2d}}{Ce^{ik_2d} - De^{-ik_2d}}. \quad (3.99)$$

Выходной импеданс в той же среде равен:

$$Z_2^{(\text{out})} = Z_2|_{x=0} = Z_{20} \frac{C + D}{C - D}. \quad (3.100)$$

Поскольку граничные условия связывают импедансы только на выходном конце среды 1 и входном конце среды 3, то для среды 1 достаточно рассмотреть только выходной импеданс:

$$Z_1^{(\text{out})} = Z_1|_{x=-d} = Z_{10} \frac{Ae^{ik_1d} + Be^{-ik_1d}}{Ae^{ik_1d} - Be^{-ik_1d}}, \quad (3.101)$$

а для среды 3 — входной:

$$Z_3^{(\text{in})} = Z_3|_{x=0} = Z_{30} \frac{E + F}{E - F}. \quad (3.102)$$

Граничные условия для импедансов состоят в равенстве выходного импеданса предыдущей среды входному импедансу последующей, то есть вместо (3.34) и (3.36) получаем:

$$Z_1^{(\text{out})}|_{x=-d} = Z_2^{(\text{in})}|_{x=-d}; \quad (3.103)$$

$$Z_2^{(\text{out})}|_{x=0} = Z_3^{(\text{in})}|_{x=0}. \quad (3.104)$$

Условия для волновых функций (3.33) и (3.35) остаются предыдущими.

Таким образом, полная система граничных условий принимает вид:

$$U_1|_{x=-d} = U_2|_{x=-d}; \quad (3.105)$$

$$Z_1^{(\text{out})}|_{x=-d} = Z_2^{(\text{in})}|_{x=-d}; \quad (3.106)$$

$$U_2|_{x=0} = U_3|_{x=0}; \quad (3.107)$$

$$Z_2^{(\text{out})}|_{x=0} = Z_3^{(\text{in})}|_{x=0}, \quad (3.108)$$

или в развернутом виде:

$$Ae^{ik_1d} + Be^{-ik_1d} = Ce^{ik_2d} + De^{-ik_2d}; \quad (3.109)$$

$$Z_{10} \frac{Ae^{ik_1d} + Be^{-ik_1d}}{Ae^{ik_1d} - Be^{-ik_1d}} = Z_{20} \frac{Ce^{ik_2d} + De^{-ik_2d}}{Ce^{ik_2d} - De^{-ik_2d}}; \quad (3.110)$$

$$C + D = E + F; \quad (3.111)$$

$$Z_{20} \frac{C + D}{C - D} = Z_{30} \frac{E + F}{E - F}. \quad (3.112)$$

Эта система фактически сводится к системе (3.85)–(3.88) с учетом (3.49)–(3.56), то есть может быть решена непосредственно ценой того же объема вычислений.

### 3.4.2. Пересчет импеданса с последующей границы на предыдущую при падении прямой волны

Заметим, однако, что структура уравнения (3.110) такова, что позволяет записать его в следующем виде:

$$Z_{10} \frac{Ae^{ik_1d} + Be^{-ik_1d}}{Ae^{ik_1d} - Be^{-ik_1d}} = Z_2^{(in)}. \quad (3.113)$$

Если в этом уравнении входной импеданс среды 2  $Z_2^{(in)}$  не зависит от каких-либо амплитуд, то при заданном значении  $A$  оно содержит только одну неизвестную  $B$ , откуда получаем:

$$B = -\frac{Z_{10} - Z_2^{(in)}}{Z_{10} + Z_2^{(in)}} Ae^{-2ik_1d}. \quad (3.114)$$

Здесь, как и ранее, экспонента убирается путем нормировки относительно точки исхода волны, в результате чего получаем:

$$B = -\frac{Z_{10} - Z_2^{(in)}}{Z_{10} + Z_2^{(in)}} A. \quad (3.115)$$

Таким образом, задача состоит в определении входного импеданса среды 2, где

$$Z_2^{(in)} = Z_{20} \frac{Ce^{ik_2d} + De^{-ik_2d}}{Ce^{ik_2d} - De^{-ik_2d}}. \quad (3.116)$$

Эта величина зависит от двух амплитуд  $C$  и  $D$ , однако структура дроби такова, что при линейной зависимости одной амплитуды от другой, всякую зависимость  $Z_2^{(in)}$  от каких-либо амплитуд можно исключить. Действительно, из условия

$$Z_{20} \frac{C + D}{C - D} = Z_3^{(in)}, \quad (3.117)$$

где  $Z_3^{(in)}$  предполагается не зависящим от каких-либо амплитуд, получаем:

$$D = -\frac{Z_{20} - Z_3^{(in)}}{Z_{20} + Z_3^{(in)}} C. \quad (3.118)$$

Подставляя (3.118) в (3.116), получаем:

$$Z_2^{(in)} = Z_{20} \frac{(Z_{20} + Z_3^{(in)})e^{ik_2d} - (Z_{20} - Z_3^{(in)})e^{-ik_2d}}{(Z_{20} + Z_3^{(in)})e^{ik_2d} + (Z_{20} - Z_3^{(in)})e^{-ik_2d}}. \quad (3.119)$$

Представляя экспоненты через тригонометрические функции в соответствии с формулой Эйлера [123, стр. 76, форм. (408.04)], можно записать (3.119) в виде, аналогичном приведенному в [4, стр. 16, форм. (3.9)]:

$$Z_2^{(in)} = Z_{20} \frac{Z_{20} - iZ_3^{(in)} \operatorname{tg}(k_2d)}{Z_3^{(in)} - iZ_{20} \operatorname{tg}(k_2d)}. \quad (3.120)$$

Таким образом, если известен не зависящий от каких-либо амплитуд входной импеданс среды 3, то эти две формулы позволяют из него получить входной импеданс среды 2.

Условием корректности получения формул (3.119)–(3.120) является независимость входного импеданса среды 3  $Z_3^{(in)}$  от амплитуд каких-либо волн. Как легко видеть из уравнения (3.102), это условие выполняется при  $F = 0$ , то есть в случае отсутствия падения исходной волны со стороны среды 3. При этом получаем:

$$Z_3^{(in)} = Z_{30}. \quad (3.121)$$

Подставляя (3.120) в (3.115) и учитывая (3.121), получаем:

$$B = -\frac{Z_{10} - Z_{20} \frac{Z_{20} - iZ_{30} \operatorname{tg}(k_2 d)}{Z_{30} - iZ_{20} \operatorname{tg}(k_2 d)}}{Z_{10} + Z_{20} \frac{Z_{20} - iZ_{30} \operatorname{tg}(k_2 d)}{Z_{30} - iZ_{20} \operatorname{tg}(k_2 d)}} A. \quad (3.122)$$

Выражая тангенсы через экспоненты в соответствии с формулой Эйлера [123, стр. 76, форм. (408.04)], с точностью до коэффициента нормировки, получаем:

$$B = -\frac{(Z_{10} - Z_{20})Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2 d} + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2 d}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2 d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2 d}} A, \quad (3.123)$$

что совпадает с формулой (3.71).

Найдем теперь амплитуду  $E$  проходящей волны в среде 3 при том же условии  $F = 0$ .

При этом уравнения (3.111)–(3.112) принимают вид:

$$C + D = E; \quad (3.124)$$

$$Z_{20} \frac{C + D}{C - D} = Z_{30}. \quad (3.125)$$

Выразим из этих формул  $C$  и  $D$  через  $E$ :

$$C = \frac{Z_{20} + Z_{30}}{2Z_{30}} E; \quad (3.126)$$

$$D = -\frac{Z_{20} - Z_{30}}{2Z_{30}} E. \quad (3.127)$$

Подставляя (3.126)–(3.127) в (3.43) и разрешая полученное выражение относительно  $E$ , получаем:

$$E = \frac{2Z_{30}(Ae^{ik_1 d} + Be^{-ik_1 d})}{(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_1 d} - (Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_1 d}}. \quad (3.128)$$

Подставляя значение  $B$  в соответствии с (3.121), получаем:

$$E = \frac{2Z_{30} \left( e^{ik_1 d} - \frac{Z_{10} - Z_{20} \frac{Z_{20} - iZ_{30} \operatorname{tg}(k_2 d)}{Z_{30} - iZ_{20} \operatorname{tg}(k_2 d)}}{Z_{10} + Z_{20} \frac{Z_{20} - iZ_{30} \operatorname{tg}(k_2 d)}{Z_{30} - iZ_{20} \operatorname{tg}(k_2 d)}} e^{-ik_1 d} \right)}{(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_1 d} - (Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_1 d}} A. \quad (3.129)$$



Выражая тангенсы через экспоненты в соответствии с формулой Эйлера [123, стр. 76, форм. (408.04)] и упрощая многоэтажные дроби, с точностью до коэффициента нормировки, получаем:

$$E = \frac{4Z_{20}Z_{30}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}} A, \quad (3.130)$$

что совпадает с формулой (3.72). Того же можно добиться путем подстановки в формулу (3.128) выражения для  $B$  вида (3.123).

Итак, главным результатом настоящего раздела является получение формул (3.119), (3.120), которые, при условии отсутствия падения встречной волны, позволяют пересчитывать входной импеданс последующей среды во входной импеданс предыдущей. Такой пересчет позволяет по амплитуде падающей волны прямого направления  $A$  в среде  $1$  найти амплитуду отраженной волны  $B$  обратного направления в той же среде  $1$ , после чего, используя полученное значение  $B$ , найти амплитуду проходящей волны  $E$  прямого направления в среде  $3$ .

### 3.4.3. Пересчет импеданса с последующей границы на предыдущую при падении встречной волны

Рассмотренный в предыдущем разделе способ пересчета импеданса с последующей границы на предыдущую пригоден только при условии отсутствия падения волны встречного направления, то есть при  $F = 0$ . Для случая  $F \neq 0$ , однако при условии  $A = 0$ , то есть в отсутствие падения волны прямого направления, можно найти амплитуды выходящих из структуры волн  $E$  и  $B$ , применив такой же пересчет в обратном порядке. Покажем, как это можно сделать.

Будем рассматривать теперь входные и выходные импедансы сред по отношению к волне, распространяющейся в отрицательном направлении оси  $Ox$ . При этом, в соответствии с (3.27)–(3.29), при условии  $A = 0$ , получаем:

выходной импеданс в среде  $3$  (при  $x = 0$ )

$$Z_3^{(out)} = Z_{30} \frac{E + F}{E - F}; \quad (3.131)$$

входной импеданс в среде  $2$  (при  $x = 0$ )

$$Z_2^{(in)} = Z_{20} \frac{C + D}{C - D}; \quad (3.132)$$

выходной импеданс в среде  $2$  (при  $x = -d$ )

$$Z_2^{(out)} = Z_{20} \frac{Ce^{ik_2d} + De^{-ik_2d}}{Ce^{ik_2d} - De^{-ik_2d}}; \quad (3.133)$$

входной импеданс в среде  $1$  (при  $x = -d$ )

$$Z_1^{(in)} = -Z_{10}. \quad (3.134)$$

На границе  $1$  должно выполняться условие

$$Z_2^{(out)} = Z_1^{(in)}, \quad (3.135)$$

откуда получаем:

$$Z_{20} \frac{C e^{ik_2 d} + D e^{-ik_2 d}}{C e^{ik_2 d} - D e^{-ik_2 d}} = Z_1^{(in)}. \quad (3.136)$$

Из этого выражения находим  $D$  через  $C$ :

$$D = -\frac{Z_{20} - Z_1^{(in)}}{Z_{20} + Z_1^{(in)}} e^{2ik_2 d} C. \quad (3.137)$$

Подставляя это значение  $D$  в (3.132) и упрощая многоэтажные дроби, получаем:

$$Z_2^{(in)} = Z_{20} \frac{(Z_{20} + Z_1^{(in)}) e^{-ik_2 d} - (Z_{20} - Z_1^{(in)}) e^{ik_2 d}}{(Z_{20} + Z_1^{(in)}) e^{-ik_2 d} + (Z_{20} - Z_1^{(in)}) e^{ik_2 d}}. \quad (3.138)$$

Представляя экспоненты через тригонометрические функции в соответствии с формулой Эйлера [123, стр. 76, форм. (408.04)], можно, подобно [4, стр. 76, форм. (408.04)], записать (3.138) в виде, аналогичном (3.120):

$$Z_2^{(in)} = Z_{20} \frac{Z_1^{(in)} - i Z_{20} \operatorname{tg}(k_2 d)}{Z_{20} - i Z_1^{(in)} \operatorname{tg}(k_2 d)}. \quad (3.139)$$

Эти две формулы также позволяют пересчитывать входной импеданс с предыдущей границы на последующую по отношению к направлению распространения встречной волны, то есть в отрицательном направлении оси  $Ox$ .

Теперь обратимся к нахождению амплитуды волны  $E$ , распространяющейся в прямом направлении, то есть являющейся отраженной по отношению к падающей встречной волне  $F$ .

Так, из (3.131) получаем:

$$E = \frac{Z_3^{(out)} + Z_{30}}{Z_3^{(out)} - Z_{30}} F. \quad (3.140)$$

На границе 2 должно выполняться условие непрерывности импеданса:

$$Z_3^{(out)} = Z_2^{(in)}, \quad (3.141)$$

которое дает возможность записать (3.140) в виде

$$E = \frac{Z_2^{(in)} + Z_{30}}{Z_2^{(in)} - Z_{30}} F. \quad (3.142)$$

Учитывая условие (3.134), из (3.138) получаем:

$$Z_2^{(in)} = -Z_{20} \frac{(Z_{10} + Z_{20}) e^{ik_2 d} + (Z_{10} - Z_{20}) e^{-ik_2 d}}{(Z_{10} + Z_{20}) e^{ik_2 d} - (Z_{10} - Z_{20}) e^{-ik_2 d}}. \quad (3.143)$$

Подставляя (3.143) в (3.142) и упрощая дроби, получаем:

$$E = \frac{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30}) e^{ik_2 d} + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30}) e^{-ik_2 d}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30}) e^{ik_2 d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30}) e^{-ik_2 d}} F. \quad (3.144)$$

Найдем теперь амплитуду  $B$  проходящей волны встречного направления в среде  $I$  при том же условии  $A = 0$ . Выразим искомую амплитуду  $B$  из (3.109) при  $A = 0$ :

$$B = (C \cdot e^{ik_2d} + D \cdot e^{-ik_2d})e^{ik_1d}. \quad (3.145)$$

Учитывая условие (3.134), из (3.137) получаем:

$$D = \frac{Z_{10} + Z_{20}}{Z_{10} - Z_{20}} e^{2ik_2d} C. \quad (3.146)$$

Подставляя (3.146) в (3.145), получаем:

$$B = \frac{2Z_{10}}{Z_{10} - Z_{20}} e^{ik_2d} e^{ik_1d} C. \quad (3.147)$$

Подставляя  $D$  из (3.146) в (3.111), находим  $C$  через  $E$  и  $F$ :

$$C = \frac{(Z_{10} - Z_{20})e^{-ik_2d}}{(Z_{10} + Z_{20})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})e^{-ik_2d}} (E + F). \quad (3.148)$$

Подставляя это выражение в (3.147), получаем:

$$B = \frac{2Z_{10}}{(Z_{10} + Z_{20})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})e^{-ik_2d}} (E + F)e^{ik_1d}. \quad (3.149)$$

Подставляя в это выражение полученное ранее значение  $E$  в соответствии с формулой (3.144), с точностью до нормировки на точку исхода, получаем:

$$B = \frac{4Z_{10}Z_{20}}{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e^{ik_2d} + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e^{-ik_2d}} F. \quad (3.150)$$

Можно видеть, что амплитуды  $E$  и  $B$ , определяемые формулами (3.144) и (3.150), с точностью до направления распространения соответствующих волн, совпадают с аналогичными амплитудами, полученными прямым методом [1, стр. 129. форм. (3.174)–(3.177)].

Главным результатом настоящего раздела, как и предыдущего, является получение формул (3.138), (3.139), которые, при условии отсутствия падения прямой волны, позволяют пересчитывать входной импеданс последующей среды во входной импеданс предыдущей. Такой пересчет позволяет по амплитуде падающей волны встречного направления  $F$  в среде  $3$  найти амплитуду отраженной волны прямого направления  $E$  в той же среде  $3$ , после чего, используя полученное значение  $E$ , найти амплитуду проходящей волны обратного направления  $B$  в среде  $1$ .

### Выводы по главе 3

Данная глава посвящена описанию на примере одномерной волны некоторых схем применения обобщенного импеданса для решения задач о распространении волн. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено распространение одномерной волны через две среды, разделенные одной границей. Для решения задачи применен пря-

мой метод импеданса. Записаны обобщенные импедансы для волн, распространяющихся в обоих направлениях относительно нормали к границе. Приведены граничные условия, состоящие в сохранении на границе значений амплитуд и обобщенных импедансов. На основе граничных условий получена система линейных уравнений, из решения которой при задании амплитуд волн прямого и встречного направлений, падающих на границу, определены амплитуды отраженной и проходящей волн, отходящих от границы,

2. Прямым методом импеданса рассмотрено падение волн прямого и обратного направлений на структуру из трех сред, разделенных двумя границами. Записаны обобщенные импедансы и граничные условия для амплитуд и импедансов. Путем решения полученной системы уравнений найдены амплитуды волн обоих направлений, выходящие из структуры, а также амплитуды волн, распространяющихся внутри структуры. Отмечено, что применение прямого метода импеданса для структуры из нескольких сред требует раскрытия довольно громоздких определителей, порядок которых пропорционален квадрату числа границ, что стимулирует поиск более простых методов.

3. С целью экономии труда предложено применение метода последовательных вычислений, основанного на введении понятий входного и выходного импедансов. Для участка среды конечной длины относительно волны прямого направления приведено определение входного импеданса как импеданса на начальной границе этого участка и выходного импеданса как импеданса на конечной границе того же участка. В качестве граничного условия для импедансов положено равенство между выходным импедансом предыдущей среды и входным импедансом среды последующей.

4. Приведена схема и получена формула для пересчета входного импеданса последующей среды во входной импеданс среды предыдущей. Полученная схема позволяет, зная входной импеданс последней среды многосложной структуры, путем последовательного пересчета получить входной импеданс первой среды такой структуры.

5. Приведена подобная же схема, для волны обратного направления, что позволяет путем объединения обеих схем в случае падения на структуру волн обоих направлений получить полную картину отраженных и проходящих волн прямого и встречного направлений

6. Метод пересчета импедансов проиллюстрирован на примере структуры из трех сред, разделенных двумя границами. Для случая падения на структуру волн обоих направлений установлена идентичность амплитуд выходящих волн амплитудам волн, полученным прямым методом.

## Глава 4

# ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ИМПЕДАНСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН

Глава посвящена рассмотрению методом входного и выходного импедансов падения двух одномерных волн прямого и встречного направлений на структуру, содержащую произвольное число сред. Случаи от двух до пяти сред рассмотрены наиболее подробно, выполнено сравнение с результатами, полученными прямым методом. Для произвольного числа сред получены рекуррентные формулы пересчета импеданса по ходу волны с последующей среды на предыдущую. Приведены общие схемы пересчета импедансов и амплитуд для обоих направлений распространения волн. Рассмотрение проведено как от конца к началу, так и от начала к концу структуры, что позволило получить амплитуды отраженных от структуры и выходящих из нее волн в обоих направлениях.

В главе частично использован материал монографии [59, стр. 68–113]. Сравнение с результатами, получаемыми прямым методом, выполнено на основе монографий [57] и [1]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 4.1. Основные принципы рассмотрения волн в структурах, содержащих от двух до пяти сред

В качестве достаточно информативного частного случая рассмотрим распространение одномерных волн прямого и встречного направлений при падении на структуру, содержащую от двух до пяти сред. Такое число сред выбрано по той причине, что оно недостаточно велико, чтобы привести к чрезмерно громоздким вычислениям и в то же время в полной мере позволяет выявить основные закономерности явления. Начнем рассмотрение со структуры из двух сред, после чего перейдем к трем средам и так далее вплоть до пяти сред.

### 4.2. Волны в структуре, содержащей две среды

Начнем рассмотрение со случая двух сред, геометрия которого показана на рис. 4.1.

Структура состоит из двух сред (номера 1 и 2 в кругах), разделенных одной границей (номер 1 в треугольнике). Параметры обеих

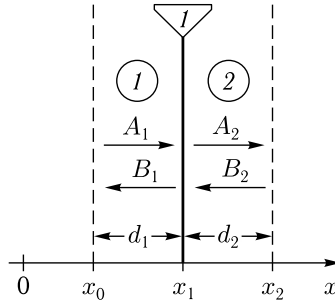


Рис. 4.1. Геометрия структуры из двух сред

сред могут быть различными, волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  могут быть действительными или комплексными.

Амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , обозначены буквами  $A_1$  и  $A_2$ , где  $i = 1, 2$  — номера сред. Амплитуды волн, распространяющихся в отрицательном направлении той же оси, обозначены буквами  $B_1$  и  $B_2$ . В среде 1 распространяются волны  $A_1$  и  $B_1$ , в среде 2 — волны  $A_2$  и  $B_2$ .

Амплитуды  $A_1$  и  $B_2$  заданы, то есть на структуру падают две встречные волны: одна слева направо из точки с координатой  $x_0$ , имеющая амплитуду  $A_{10}$ , другая справа налево из точки с координатой  $x_2$ , имеющая амплитуду  $B_{20}$  и сдвиг фазы относительно первой волны на угол  $\varphi$ .

Таким образом,

$$A_1 = A_{10}; \quad (4.1)$$

$$B_2 = B_{20}e^{i\varphi}. \quad (4.2)$$

Амплитуды и фазы двух других волн определяются амплитудами и соотношением фаз этих волн в сочетании с параметрами сред.

Решения волновых уравнений в различных областях, нормированные относительно точек исхода соответствующих волн [1, стр. 112–117], имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (4.3)$$

$$U_2 = A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2 e^{ik_2(x-x_2)}. \quad (4.4)$$

Производные решений имеют вид:

$$\frac{dU_1}{dx} = -iA_1 k_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + iB_1 k_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (4.5)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -iA_2 k_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + iB_2 k_2 e^{ik_2(x-x_2)}. \quad (4.6)$$

Импедансы сред имеют вид:

$$Z_1 = Z_{10} \frac{A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}}{A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} - B_1 e^{ik_1(x-x_1)}}; \quad (4.7)$$

$$Z_2 = Z_{20} \frac{A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2 e^{ik_2(x-x_2)}}{A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} - B_2 e^{ik_2(x-x_2)}}, \quad (4.8)$$

где нулевые импедансы равны:

$$Z_{10} = \frac{1}{k_1}; \quad (4.9)$$

$$Z_{20} = \frac{1}{k_2}. \quad (4.10)$$

Граничные условия при  $x = x_1$  имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (4.11)$$

$$Z_1|_{x=x_2} = Z_2|_{x=x_2}. \quad (4.12)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения:

$$e_1 = e^{-ik_1(x_1-x_0)}; \quad (4.13)$$

$$e_2 = e^{-ik_2(x_2-x_1)}, \quad (4.14)$$

а также

$$e_0 = e^{i\varphi}. \quad (4.15)$$

В данной задаче, насчитывающей всего две среды, пересчет импеданса не требуется, поэтому решим ее прямым методом (разделы 3.2, 3.3).

Подставляя (4.3)–(4.4) и (4.7)–(4.8) в граничные условия (4.11)–(4.12), получаем:

$$A_1 e_1 + B_1 = A_2 + B_2 e_2; \quad (4.16)$$

$$Z_{10} \frac{A_1 e_1 + B_1}{A_1 e_1 - B_1} = Z_{20} \frac{A_2 + B_2 e_2}{A_2 - B_2 e_2}. \quad (4.17)$$

Здесь  $A_1$  и  $B_2$  являются заданными, а  $B_1$  и  $A_2$  подлежат определению. Для этих неизвестных из (4.16)–(4.17) получаем систему уравнений:

$$B_1 - A_2 = -A_1 e_1 + B_2 e_2; \quad (4.18)$$

$$B_1 Z_{20} + A_2 Z_{10} = A_1 Z_{20} e_1 + B_2 Z_{10} e_2. \quad (4.19)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$B_1 = -\frac{Z_{10} - Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}} A_1 e_1 + \frac{2Z_{10}}{Z_{10} + Z_{20}} B_2 e_2; \quad (4.20)$$

$$A_2 = \frac{2Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}} A_1 e_1 + \frac{Z_{10} - Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}} B_2 e_2. \quad (4.21)$$

Из сравнения этих выражений с (3.15)–(3.16) видно, что здесь к амплитудам падающих волн  $A_1$  и  $B_2$  добавляются множители  $e_1$  и  $e_2$ ,

определяемые формулами (4.14). Эти множители отражают набег фазы падающих волн от начальных точек исхода  $x_0$  для  $A_1$  и  $x_2$  для  $B_2$  до границы при  $x = x_1$ . При этом знак минус в показателе экспоненты  $e_1$  при  $A_1$  соответствует распространению волны прямого направления  $e^{-ik_1(x-x_0)}$  в положительном направлении оси  $Ox$  от точки  $x_0$  до точки  $x_1$  при временной зависимости вида  $e^{i\omega t}$ . Знак минус в показателе экспоненты  $e_2$  при  $B_2$  соответствует распространению волны обратного направления  $e^{ik_2(x-x_2)}$  в отрицательном направлении оси  $Ox$  от точки  $x_2$  до точки  $x_1$  при той же временной зависимости  $e^{i\omega t}$ , так как в точке  $x_2$  экспоненциальный множитель вида  $e^{ik_2(x-x_2)}$  равен единице, а в точке  $x_1$  тот же множитель имеет вид  $e^{ik_2(x_1-x_2)} = e^{-ik_2(x_2-x_1)}$ .

Получим еще из (4.7) и (4.8) два выражения, важные для дальнейшего рассмотрения.

Для случая падения волны прямого направления входной импеданс среды 2 равен:

$$Z_2^{(\text{in}A)} = Z_2|_{x=x_1} = Z_{20} \frac{A_2 + B_2 e_2}{A_2 - B_2 e_2}. \quad (4.22)$$

Для случая падения волны встречного направления входной импеданс среды 1 равен:

$$Z_1^{(\text{in}B)} = Z_1|_{x=x_1} = Z_{10} \frac{A_1 e_1 + B_1}{A_1 e_1 - B_1}, \quad (4.23)$$

### 4.3. Волны в структуре, содержащей три среды

Рассмотрим теперь случай трех сред, геометрия которого показана на рис. 4.2.

Структура состоит из трех сред (номера 1–3 в кругах), разделенных двумя границами (номера 1 и 2 в треугольниках). В традиционном рассмотрении среды 1 и 3 обычно полагаются свободными пустыми пространствами, а среда 2 — слоем с заданными параметрами, то есть задача соответствует однослойной структуре с двумя границами 1 и 2.

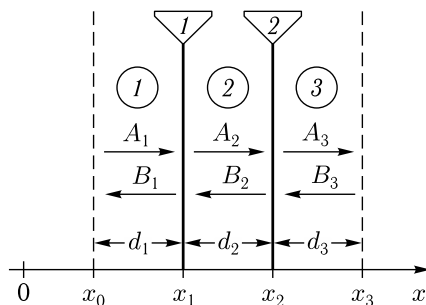


Рис. 4.2. Геометрия структуры из трех сред



Здесь параметры всех трех сред могут быть различными, все волновые числа могут быть действительными или комплексными.

Амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , обозначены буквами  $A_i$ , где  $i$  — номер среды. Амплитуды волн, распространяющихся в отрицательном направлении той же оси, обозначены буквами  $B_i$ . Таким образом, внутри среды 1 распространяются волны с амплитудами  $A_1$  и  $B_1$ , внутри среды 2 — волны с амплитудами  $A_2$  и  $B_2$ , внутри среды 3 — волны с амплитудами  $A_3$  и  $B_3$ .

Амплитуды волн  $A_1$  и  $B_3$  являются заданными, то есть на структуру падают две встречные волны: одна слева направо из точки с координатой  $x_0$ , имеющая амплитуду  $A_1$ , другая справа налево из точки с координатой  $x_3$ , имеющая амплитуду  $B_3$ . Все остальные амплитуды определяются этими двумя амплитудами в сочетании с параметрами сред. Волновые числа в средах 1–3 обозначаются через  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ . В случае начальной расфазировки падающих волн сдвиг фазы между ними можно учесть с помощью фазового множителя (4.2), аналогичного введенному в предыдущем разделе. Здесь мы этого не делаем для сокращения записи.

Решения волновых уравнений в различных областях, нормированные относительно точек исхода соответствующих волн [1, стр. 112–117], имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (4.24)$$

$$U_2 = A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2 e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (4.25)$$

$$U_3 = A_3 e^{-ik_3(x-x_2)} + B_3 e^{ik_3(x-x_3)}; \quad (4.26)$$

Производные решений имеют вид:

$$\frac{dU_1}{dx} = -iA_1 k_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + iB_1 k_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (4.27)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -iA_2 k_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + iB_2 k_2 e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (4.28)$$

$$\frac{dU_3}{dx} = -iA_3 k_3 e^{-ik_3(x-x_2)} + iB_3 k_3 e^{ik_3(x-x_3)}. \quad (4.29)$$

Импедансы сред имеют вид:

$$Z_1 = Z_{10} \frac{A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}}{A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} - B_1 e^{ik_1(x-x_1)}}; \quad (4.30)$$

$$Z_2 = Z_{20} \frac{A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2 e^{ik_2(x-x_2)}}{A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} - B_2 e^{ik_2(x-x_2)}}; \quad (4.31)$$

$$Z_3 = Z_{30} \frac{A_3 e^{-ik_3(x-x_2)} + B_3 e^{ik_3(x-x_3)}}{A_3 e^{-ik_3(x-x_2)} - B_3 e^{ik_3(x-x_3)}}, \quad (4.32)$$

где нулевые импедансы равны:

$$Z_{10} = \frac{1}{k_1}; \quad (4.33)$$

$$Z_{20} = \frac{1}{k_2}; \quad (4.34)$$

$$Z_{30} = \frac{1}{k_3}. \quad (4.35)$$

Граничные условия имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (4.36)$$

$$U_2|_{x=x_2} = U_3|_{x=x_2}; \quad (4.37)$$

$$Z_1|_{x=x_1} = Z_2|_{x=x_1}; \quad (4.38)$$

$$Z_2|_{x=x_2} = Z_3|_{x=x_2}. \quad (4.39)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения:

$$e_1 = e^{-ik_1(x_1-x_0)}; \quad (4.40)$$

$$e_2 = e^{-ik_2(x_2-x_1)}; \quad (4.41)$$

$$e_3 = e^{-ik_3(x_3-x_2)}. \quad (4.42)$$

### 4.3.1. Решение прямым методом

Рассмотрим сначала решение задачи прямым методом (разделы 3.2, 3.3). Подставляя решения (4.24)–(4.26) и импедансы (4.30)–(4.32) в граничные условия (4.36)–(4.39), учитывая (4.42), получаем:

$$A_1 e_1 + B_1 = A_2 + B_2 e_2; \quad (4.43)$$

$$A_2 e_2 + B_2 = A_3 + B_3 e_3; \quad (4.44)$$

$$Z_{10} \frac{A_1 e_1 + B_1}{A_1 e_1 - B_1} = Z_{20} \frac{A_2 + B_2 e_2}{A_2 - B_2 e_2}; \quad (4.45)$$

$$Z_{20} \frac{A_2 e_2 + B_2}{A_2 e_2 - B_2} = Z_{30} \frac{A_3 + B_3 e_3}{A_3 - B_3 e_3}. \quad (4.46)$$

Выполняя преобразование дробей и записывая слагаемые уравнений в порядке следования неизвестных, получаем систему:

$$B_1 - A_2 - B_2 e_2 = -A_1 e_1; \quad (4.47)$$

$$A_2 e_2 + B_2 - A_3 = B_3 e_3; \quad (4.48)$$

$$B_1 Z_{20} + A_2 Z_{10} - B_2 Z_{10} e_2 = A_1 Z_{20} e_1; \quad (4.49)$$

$$-A_2 Z_{30} e_2 + B_2 Z_{30} + A_3 Z_{20} = B_3 Z_{20} e_3. \quad (4.50)$$

Таблицы коэффициентов системы (4.47)–(4.50) имеют вид:

$$\begin{array}{cccc|cc}
 B_1 & A_2 & B_2 & A_3 & A_1, B_3 & \\
 \hline
 1 & -1 & -e_2 & 0 & -A_1 e_1 & \\
 0 & e_2 & 1 & -1 & B_3 e_3 & \\
 Z_{20} & Z_{10} & -Z_{10} e_2 & 0 & A_1 Z_{20} e_1 & \\
 0 & -Z_{30} e_2 & Z_{30} & Z_{20} & B_3 Z_{20} e_3 & 
 \end{array} \quad (4.51)$$

Используя метод Крамера [122, стр. 45, форм. (1.9-2)–(1.9-5)], находим детерминанты для волн, выходящих из структуры:

$$D_0 = -e_2 \{ (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1} \}; \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned}
 D_{B_1} = -e_2 \{ & -A_1 e_1 [(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + \\
 & + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}] + B_3 e_3 4Z_{10} Z_{20} \}; \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A_3} = -e_2 \{ & A_1 e_1 4Z_{20} Z_{30} + B_3 e_3 [(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2 + \\
 & + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2^{-1}] \}. \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

Амплитуды соответствующих волн принимают вид:

$$\begin{aligned}
 B_1 = - & \frac{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}}{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}} A_1 e_1 + \\
 & + \frac{4Z_{10} Z_{20}}{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}} B_3 e_3; \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 = & \frac{4Z_{20} Z_{30}}{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}} A_1 e_1 + \\
 & + \frac{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2^{-1}}{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}} B_3 e_3. \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

Здесь множители  $e_1$  и  $e_3$  при  $A_1$  и  $B_3$  отражают набег фазы волн, входящих в структуру, от точек  $x_0$  и  $x_3$  до первой и второй границ соответственно.

### 4.3.2. Решение методом входного импеданса

Рассмотрим теперь решение методом входного импеданса (раздел 3.4) по отдельности для двух случаев: падения прямой и встречной волны, то есть найдем выходящие из структуры волны прямого и встречного направлений для обоих этих случаев.

### 4.3.3. Выходящая встречная волна при падении прямой волны

Сначала будем считать, что  $B_3 = 0$  и входной импеданс будем рассматривать относительно распространения падающей волны в прямом направлении.

Следуя от конца структуры к ее началу, в соответствии с (4.32) при условии  $B_3 = 0$ , получаем входной импеданс среды 3 на границе 2:

$$Z_3^{(\text{in}A)} = Z_3|_{x=x_2} = Z_{30}. \quad (4.57)$$

Согласно формуле пересчета импеданса с последующей границы на предыдущую (3.119), получаем входной импеданс среды 2 при  $x = x_1$ :

$$Z_2^{(\text{in}A)} = Z_{20} \frac{(Z_{20} + Z_3)e^{ik_2(x_2-x_1)} - (Z_{20} - Z_3)e^{-ik_2(x_2-x_1)}}{(Z_{20} + Z_3^{(\text{in}A)})e^{ik_2(x_2-x_1)} + (Z_{20} - Z_3^{(\text{in}A)})e^{-ik_2(x_2-x_1)}}. \quad (4.58)$$

Подставляя (4.57) и вводя обозначения (4.40)–(4.42), получаем:

$$Z_2 = Z_{20} \frac{(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1} - (Z_{20} - Z_{30})e_2}{(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1} + (Z_{20} - Z_{30})e_2}. \quad (4.59)$$

Из граничного условия (4.38) для импедансов на границе 1 получаем:

$$Z_1|_{x=x_1} = Z_2^{(\text{in}A)}. \quad (4.60)$$

Подставляя в это выражение (4.30) с обозначениями (4.40)–(4.42), получаем:

$$Z_{10} \cdot \frac{A_1 e_1 + B_1}{A_1 e_1 - B_1} = Z_2^{(\text{in}A)}, \quad (4.61)$$

откуда получаем

$$B_1 = -\frac{Z_{10} + Z_2^{(\text{in}A)}}{Z_{10} - Z_2^{(\text{in}A)}} A_1. \quad (4.62)$$

Подставляя (4.59), получаем:

$$B_1 = -\frac{(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}}{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}} A_1 e_1, \quad (4.63)$$

что совпадает с (4.55) при  $B_3 = 0$ .

#### 4.3.4. Выходящая прямая волна при падении прямой волны

Найдем теперь амплитуду волны  $A_3$ , выходящей из структуры в прямом направлении. Эта амплитуда входит в граничное условие (4.36) для амплитуд на границе 2, дающее уравнение (4.44) и второе уравнение (4.48) в системе (4.47)–(4.50), из которого при  $B_3 = 0$  получаем:

$$A_3 = A_2 e_2 + B_2. \quad (4.64)$$

Граничное условие для импедансов на той же границе имеет вид:

$$Z_2^{(\text{out}A)} = Z_3^{(\text{in}A)}, \quad (4.65)$$

расписывая которое с помощью (4.31) и (4.32) при  $x = x_2$  получаем:

$$Z_{20} \cdot \frac{A_2 e_2 + B_2}{A_2 e_2 - B_2} = Z_{30}. \quad (4.66)$$

Разделяя (4.64) на (4.66), в сочетании с (4.64), получаем систему, связывающую  $A_2$  и  $B_2$  с  $A_3$ :

$$A_2 e_2 + B_2 = A_3; \quad (4.67)$$

$$A_2 Z_{30} e_2 - B_2 Z_{30} = A_3 Z_{20}. \quad (4.68)$$

Решение этой системы, позволяющее выразить  $A_2$  и  $B_2$  через  $A_3$ , имеет вид:

$$A_2 = \frac{Z_{20} + Z_{30}}{2Z_{30}} A_3 e_2^{-1}; \quad (4.69)$$

$$B_2 = -\frac{Z_{20} - Z_{30}}{2Z_{30}} A_3. \quad (4.70)$$

Воспользуемся теперь граничным условием (4.36) для амплитуд на границе 1, которое дает первое уравнение (4.47) в системе (4.47)–(4.50), откуда получаем:

$$A_2 + B_2 e_2 = A_1 e_1 + B_1. \quad (4.71)$$

Подставляя сюда  $A_2$  и  $B_2$  в соответствии с (4.69) и (4.70), после чего решая полученное уравнение относительно  $A_3$ , получаем:

$$A_3 = -\frac{2Z_{30}(A_1 e_1 + B_1)}{(Z_{20} - Z_{30})e_2 - (Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}}. \quad (4.72)$$

Входящая в это выражение величина  $B_1$  уже определена через  $A_1$  формулой (4.63), подставляя которую, после упрощения дробей, получаем:

$$A_3 = \frac{4Z_{20}Z_{30}}{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}} A_1 e_1, \quad (4.73)$$

что совпадает с (4.56) при  $B_3 = 0$ .

**Замечание.** Итак, при падении прямой волны  $A_1$  для нахождения амплитуды волны, выходящей из структуры во встречном направлении  $B_1$ , то есть являющейся отраженной по отношению к падающей волне прямого направления  $A_1$ , мы дважды воспользовались граничными условиями для импедансов (4.57) и (4.60), переходя от конца структуры к ее началу (от границы 2 к границе 1).

Для нахождения амплитуды волны, выходящей из структуры в прямом направлении  $A_3$ , то есть являющейся проходящей по отношению к падающей волне прямого направления  $A_1$ , мы дважды воспользовались граничными условиями для амплитуд (4.64) и (4.71), также переходя от конца структуры к ее началу (от границы 2 к границе 1), и один раз граничным условием для импедансов (4.65) на последней (второй) границе, а также уже полученным ранее решением (4.59) для амплитуды волны, выходящей из структуры во встречном направлении  $B_1$ .

#### 4.3.5. Выходящая прямая волна при падении встречной волны

Рассмотрим теперь решение задачи для случая падения на структуру волны встречного направления с амплитудой  $B_3$ , полагая падающую волну прямого направления отсутствующей, то есть при  $A_1 = 0$ . При этом входной импеданс будем рассматривать относительно распространения падающей волны в обратном направлении. Для устранения возможности путаницы, будем называть такой импеданс «встречным».

В соответствии с формулой (4.30) встречный входной импеданс в среде 1 при условии  $A_1 = 0$  принимает вид:

$$Z_1^{(\text{in}B)} = Z_1|_{x=x_1} = -Z_{10}. \quad (4.74)$$

Для пересчета импеданса от среды 1 к среде 2 воспользуемся формулой (3.138):

$$Z_2^{(\text{in}B)} = Z_{20} \frac{(Z_{20} + Z_1^{(\text{in}B)})e^{-ik_2d} - (Z_{20} - Z_1^{(\text{in}B)})e^{ik_2d}}{(Z_{20} + Z_1^{(\text{in}B)})e^{-ik_2d} + (Z_{20} - Z_1^{(\text{in}B)})e^{ik_2d}}, \quad (4.75)$$

в соответствии с которой, с учетом (4.74), при обозначениях (4.40)–(4.42) получаем:

$$Z_2^{(\text{in}B)} = Z_{20} \frac{(Z_{10} - Z_{20})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})e_2^{-1}}{(Z_{10} - Z_{20})e_2 - (Z_{10} + Z_{20})e_2^{-1}}. \quad (4.76)$$

Из граничного условия (4.39) для импедансов на границе 2 получаем:

$$Z_3|_{x=x_2} = Z_2^{(\text{in}B)}. \quad (4.77)$$

Подставляя в это выражение (4.32) с обозначениями (4.40)–(4.42), получаем:

$$Z_{30} \cdot \frac{A_3 + B_3 e_3}{A_3 - B_3 e_3} = Z_2^{(\text{in}B)}, \quad (4.78)$$

откуда получаем

$$A_3 = -\frac{Z_{30} + Z_2^{(\text{in}B)}}{Z_{30} - Z_2^{(\text{in}B)}} B_3 e_3. \quad (4.79)$$

Подставляя (4.76), получаем:

$$A_3 = \frac{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2^{-1}}{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}} B_3 e_3, \quad (4.80)$$

что совпадает с (4.56) при  $A_1 = 0$ .

#### 4.3.6. Выходящая встречная волна при падении встречной волны

Найдем теперь амплитуду волны  $B_1$ , выходящей из структуры во встречном направлении. Эта амплитуда входит в граничное условие (4.36) для амплитуд на границе 1, дающее уравнение (4.43) и первое уравнение (4.47) в системе (4.47)–(4.50), из которого при  $A_1 = 0$  получаем:

$$B_1 = A_2 + B_2 e_2. \quad (4.81)$$

Граничное условие для импедансов на той же границе имеет вид:

$$Z_2^{(\text{out}B)} = Z_1^{(\text{in}B)}, \quad (4.82)$$

расписывая которое с помощью (4.30) и (4.31) при  $x = x_1$ , получаем:

$$Z_{20} \cdot \frac{A_2 + B_2 e_2}{A_2 - B_2 e_2} = -Z_{10}. \quad (4.83)$$

Разделив (4.81) на (4.83), в сочетании с (4.81), получаем систему, связывающую  $A_2$  и  $B_2$  с  $B_1$ :

$$A_2 + B_2 e_2 = B_1; \quad (4.84)$$

$$A_2 Z_{10} - B_2 Z_{10} e_2 = -B_1 Z_{20}. \quad (4.85)$$

Решение этой системы, позволяющее выразить  $A_2$  и  $B_2$  через  $B_1$ , имеет вид:

$$A_2 = \frac{Z_{10} - Z_{20}}{2Z_{10}} B_1; \quad (4.86)$$

$$B_2 = \frac{Z_{10} + Z_{20}}{2Z_{10}} B_1 e_2^{-1}. \quad (4.87)$$

Воспользуемся теперь граничным условием (4.37) для амплитуд на границе 2, которое дает второе уравнение (4.48) в системе (4.47)–(4.50), откуда получаем:

$$A_2 e_2 + B_2 - A_3 = B_3 e_3. \quad (4.88)$$

Подставляя сюда  $A_2$  и  $B_2$  в соответствии с (4.86) и (4.87), после чего решая полученное уравнение относительно  $B_1$ , получаем:

$$B_1 = \frac{2Z_{10}(A_3 + B_3 e_3)}{(Z_{10} - Z_{20})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})e_2^{-1}}. \quad (4.89)$$

Входящая в это выражение величина  $A_3$  уже определена через  $B_3$  формулой (4.80), подставляя которую, после упрощения дробей, получаем:

$$B_1 = \frac{4Z_{10}Z_{20}}{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}} B_3 e_3 \quad (4.90)$$

что совпадает с (4.55) при  $A_1 = 0$ .

**Замечание.** Итак, при падении встречной волны  $B_3$  для нахождения амплитуды волны, выходящей из структуры в прямом направлении  $A_3$ , то есть являющейся отраженной по отношению к падающей волне встречного направления  $B_3$ , мы дважды воспользовались граничными условиями для импедансов (4.74) и (4.77), переходя от начала структуры к ее концу (от границы 1 к границе 2).

Для нахождения амплитуды волны, выходящей из структуры во встречном направлении  $B_1$ , то есть являющейся проходящей по отношению к падающей волне встречного направления  $B_3$ , мы дважды воспользовались граничными условиями для амплитуд (4.81) и (4.88),

также переходя от начала структуры к ее концу (от границы 1 к границе 2), и один раз граничным условием для импедансов (4.82) на последней (первой) границе, а также уже полученным ранее решением (4.80) для амплитуды волны, выходящей из структуры в прямом направлении  $A_3$ .

Таким образом, действия по нахождению амплитуд выходящих волн при падении как прямой, так и встречной волн одни и те же, но проводятся по отношению к началу и концу структуры в обратном порядке.

#### 4.4. Волны в структуре, содержащей четыре среды

Рассмотрим теперь случай четырех сред, геометрия которого показана на рис. 4.3.

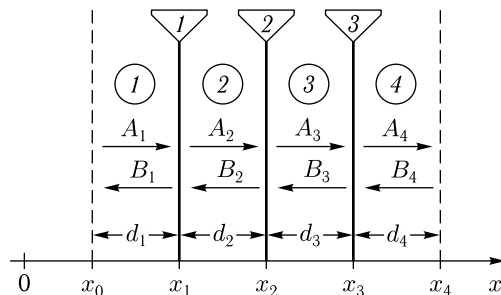


Рис. 4.3. Геометрия структуры из четырех сред

Структура состоит из четырех сред (номера 1–4 в кругах), разделенных тремя границами (номера 1–3 в треугольниках).

Амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , обозначены буквами  $A_i$ , в отрицательном —  $B_i$ , где  $i$  — номер среды.

Амплитуды входящих в структуру волн  $A_1$  и  $B_3$  заданы, остальные амплитуды определяются этими двумя амплитудами в сочетании с параметрами сред. Волновые числа в средах 1–4 обозначаются через  $k_1, k_2, k_3, k_4$ . Как и в случае трех сред начальную расфазировку падающих волн не учитываем.

Решения волновых уравнений в областях 1–4, нормированные относительно точек исхода соответствующих волн [1, стр. 112–117], имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (4.91)$$

$$U_2 = A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2 e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (4.92)$$

$$U_3 = A_3 e^{-ik_3(x-x_2)} + B_3 e^{ik_3(x-x_3)}; \quad (4.93)$$

$$U_4 = A_4 e^{-ik_4(x-x_3)} + B_4 e^{ik_4(x-x_4)}. \quad (4.94)$$



Импедансы сред имеют вид:

$$Z_1 = Z_{10} \frac{A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}}{A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} - B_1 e^{ik_1(x-x_1)}}; \quad (4.95)$$

$$Z_2 = Z_{20} \frac{A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2 e^{ik_2(x-x_2)}}{A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} - B_2 e^{ik_2(x-x_2)}}; \quad (4.96)$$

$$Z_3 = Z_{30} \frac{A_3 e^{-ik_3(x-x_2)} + B_3 e^{ik_3(x-x_3)}}{A_3 e^{-ik_3(x-x_2)} - B_3 e^{ik_3(x-x_3)}}; \quad (4.97)$$

$$Z_4 = Z_{40} \frac{A_4 e^{-ik_4(x-x_3)} + B_4 e^{ik_4(x-x_4)}}{A_4 e^{-ik_4(x-x_3)} - B_4 e^{ik_4(x-x_4)}}, \quad (4.98)$$

где нулевые импедансы равны:

$$Z_{10} = \frac{1}{k_1}; \quad (4.99)$$

$$Z_{20} = \frac{1}{k_2}; \quad (4.100)$$

$$Z_{30} = \frac{1}{k_3}; \quad (4.101)$$

$$Z_{40} = \frac{1}{k_4}. \quad (4.102)$$

Граничные условия имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (4.103)$$

$$U_2|_{x=x_2} = U_3|_{x=x_2}; \quad (4.104)$$

$$U_3|_{x=x_3} = U_4|_{x=x_3}; \quad (4.105)$$

$$Z_1|_{x=x_1} = Z_2|_{x=x_1}; \quad (4.106)$$

$$Z_2|_{x=x_2} = Z_3|_{x=x_2}; \quad (4.107)$$

$$Z_3|_{x=x_3} = Z_4|_{x=x_3}. \quad (4.108)$$

Для упрощения записи введены обозначения:

$$e_1 = e^{-ik_1(x_1-x_0)}; \quad (4.109)$$

$$e_2 = e^{-ik_2(x_2-x_1)}; \quad (4.110)$$

$$e_3 = e^{-ik_3(x_3-x_2)}; \quad (4.111)$$

$$Z_{40} = \frac{1}{k_4}. \quad (4.112)$$

В данной задаче решение прямым методом не содержит никакой принципиальной новизны по сравнению с предыдущим случаем, однако получается довольно громоздким, поэтому опустим его и сразу перейдем к решению методом входного импеданса.

#### 4.4.1. Решение методом входного импеданса

Рассмотрим решение методом входного импеданса (раздел 3.4) по отдельности для двух случаев: падения прямой волны и падения встречной волны.

#### 4.4.2. Выходящая встречная волна при падении прямой волны

Сначала будем считать, что  $B_4 = 0$  и входной импеданс будем рассматривать относительно распространения падающей волны в прямом направлении.

Следуя от конца структуры к ее началу, в соответствии с (4.98) при условии  $B_4 = 0$ , получаем входной импеданс среды 4 на границе 3:

$$Z_4^{(\text{inA})} = Z_4 \Big|_{x=x_3} = Z_{40}. \quad (4.113)$$

Согласно формуле пересчета импеданса с последующей границы на предыдущую (3.119), получаем входной импеданс среды 3 при  $x = x_2$ :

$$Z_3^{(\text{inA})} = Z_{30} \frac{(Z_{30} + Z_4^{(\text{inA})})e^{ik_3(x_3-x_2)} - (Z_{30} - Z_4^{(\text{inA})})e^{-ik_3(x_3-x_2)}}{(Z_{30} + Z_4^{(\text{inA})})e^{ik_3(x_3-x_2)} + (Z_{30} - Z_4^{(\text{inA})})e^{-ik_3(x_3-x_2)}}. \quad (4.114)$$

В обозначениях (4.109)–(4.112) получаем:

$$Z_3^{(\text{inA})} = Z_{30} \frac{(Z_{30} + Z_4^{(\text{inA})})e_3^{-1} - (Z_{30} - Z_4^{(\text{inA})})e_3}{(Z_{30} + Z_4^{(\text{inA})})e_3^{-1} + (Z_{30} - Z_4^{(\text{inA})})e_3}. \quad (4.115)$$

Находим аналогично входной импеданс среды 2 при  $x = x_1$ :

$$Z_2^{(\text{inA})} = Z_{20} \frac{(Z_{20} + Z_3^{(\text{inA})})e_2^{-1} - (Z_{20} - Z_3^{(\text{inA})})e_2}{(Z_{20} + Z_3^{(\text{inA})})e_2^{-1} + (Z_{20} - Z_3^{(\text{inA})})e_2}. \quad (4.116)$$

Из граничного условия (4.106) для импедансов на границе 1 получаем:

$$Z_1 \Big|_{x=x_1} = Z_2^{(\text{inA})}. \quad (4.117)$$

Подставляя в это выражение (4.95) с обозначениями (4.109)–(4.112), получаем:

$$Z_{10} \frac{A_1 e_1 + B_1}{A_1 e_1 - B_1} = Z_2^{(\text{inA})}, \quad (4.118)$$

откуда получаем

$$B_1 = -\frac{Z_{10} + Z_2^{(\text{inA})}}{Z_{10} - Z_2^{(\text{inA})}} A_1. \quad (4.119)$$

Подстановка в это выражение (4.116) дает

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0} A_1 e_1, \quad (4.120)$$

где

$$D_0 = [(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30}) + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2^2](Z_{30} + Z_{40}) + \\ + [(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30}) + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^2](Z_{30} - Z_{40})e_3^2; \quad (4.121)$$

$$D_{B1} = -\left\{ [(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30}) + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2^2](Z_{30} + Z_{40}) + \right. \\ \left. + [(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30}) + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^2](Z_{30} - Z_{40})e_3^2 \right\}. \quad (4.122)$$

Можно видеть, что найденная таким образом амплитуда  $B_1$  совпадает с выражением, полученным прямым методом [57, стр. 69, форм. (4.40), (4.34)], [1, стр. 229–230, форм. (5.231), (5.225)].

#### 4.4.3. Выходящая прямая волна при падении прямой волны

Найдем теперь амплитуду волны  $A_4$ , выходящей из структуры в прямом направлении. Эта амплитуда входит в граничное условие (4.105) для амплитуд на границе  $\mathcal{Z}$ , откуда при  $B_4 = 0$  получаем:

$$A_4 = A_3 e_3 + B_3. \quad (4.123)$$

Граничное условие для импедансов на той же границе имеет вид

$$Z_3^{(\text{out}A)} = Z_4^{(\text{in}A)}, \quad (4.124)$$

расписывая которое с помощью (4.97) и (4.98) при  $x = x_3$ , получаем:

$$Z_{30} \frac{A_3 e_3 + B_3}{A_3 e_3 - B_3} = Z_{40}. \quad (4.125)$$

Разделив (4.123) на (4.125), получаем систему уравнений, связывающую  $A_3$  и  $B_3$  с  $A_4$ :

$$A_3 e_3 + B_3 = A_4; \quad (4.126)$$

$$A_4 Z_{40} e_3 - B_3 Z_{40} = A_4 Z_{30}. \quad (4.127)$$

Решение этой системы, позволяющее выразить  $A_3$  и  $B_3$  через  $A_4$ , имеет вид:

$$A_3 = \frac{Z_{30} + Z_{40}}{2Z_{40}} A_4 e_3^{-1}; \quad (4.128)$$

$$B_3 = -\frac{Z_{30} - Z_{40}}{2Z_{40}} A_4. \quad (4.129)$$

Воспользуемся теперь граничным условием (4.104), для амплитуд на границе 2 из которого получаем:

$$A_3 + B_3 e_3 = A_2 e_2 + B_2. \quad (4.130)$$

Граничное условие (4.107) для импедансов на границе 2 дает

$$Z_{20} \frac{A_2 e_2 + B_2}{A_2 e_2 - B_2} = Z_{30} \frac{A_3 + B_3 e_3}{A_3 - B_3 e_3}. \quad (4.131)$$

Из (4.130) и (4.131) получаем систему уравнений:

$$A_2 e_2 + B_2 = A_3 + B_3 e_3; \quad (4.132)$$

$$A_2 Z_{30} e_2 - B_2 Z_{30} = A_3 Z_{20} - B_3 Z_{20} e_3. \quad (4.133)$$

Решение этой системы относительно  $A_2$  и  $B_2$  имеет вид:

$$A_2 = \frac{A_3(Z_{20} + Z_{30}) - B_3 e_3(Z_{20} - Z_{30})}{2Z_{30}} e_2^{-1}; \quad (4.134)$$

$$B_2 = \frac{-A_3(Z_{20} - Z_{30}) + B_3 e_3(Z_{20} + Z_{30})}{2Z_{30}}. \quad (4.135)$$

В этих выражениях  $A_3$  и  $B_3$  определяются формулами (4.128)–(4.129), которые в свою очередь определяются значением  $A_4$ , то есть формулы (4.134)–(4.135) выражают амплитуды  $A_2$  и  $B_2$  в среде 2 через амплитуду волны  $A_4$  в среде 4.

Обратимся теперь к границе 1. Граничные условия для амплитуд и импедансов (4.103) и (4.106) на этой границе дают

$$A_1 e_1 + B_1 = A_2 + B_2 e_2; \quad (4.136)$$

$$Z_{10} \frac{A_1 e_1 + B_1}{A_1 e_1 - B_1} = Z_{20} \frac{A_2 + B_2 e_2}{A_2 - B_2 e_2}. \quad (4.137)$$

Из этих двух уравнений получаем систему:

$$A_1 e_1 + B_1 = A_2 + B_2 e_2; \quad (4.138)$$

$$A_1 Z_{20} e_1 - B_1 Z_{20} = A_2 Z_{10} - B_2 Z_{10} e_2, \quad (4.139)$$

решение которой относительно  $A_1$  имеет вид

$$A_1 = \frac{A_2(Z_{10} + Z_{20}) - B_2 e_2(Z_{10} - Z_{20})}{2Z_{20}} e_1^{-1}. \quad (4.140)$$

В этой формуле  $A_2$  и  $B_2$  через посредство (4.134)–(4.135) и (4.128)–(4.129) определяются величиной  $A_4$ . Таким образом, получено выражение, связывающее амплитуду выходящей из структуры волны прямого направления  $A_4$  с амплитудой падающей волны того же прямого направления  $A_1$ . Это выражение можно рассматривать как уравнение относительно  $A_4$ , решая которое получаем:

$$A_4 = \frac{D_{A4}}{D_0} A_1 e_1, \quad (4.141)$$

где

$$D_{A4} = 8Z_{20}Z_{30}Z_{04}, \quad (4.142)$$

а  $D_0$  определяется выражением (4.121).

Можно видеть, что найденная таким образом амплитуда  $A_4$  совпадает с выражением, полученным прямым методом [57, стр. 60, форм. (4.39)], [1, стр. 230, форм. (5.230)].

#### 4.4.4. Выходящая прямая волна при падении встречной волны

Рассмотрим теперь решение задачи для случая падения на структуру волны встречного направления с амплитудой  $B_4$ , полагая падающую волну прямого направления отсутствующей, то есть при  $A_1 = 0$ . При этом входной импеданс будем рассматривать относительно распространения падающей волны в обратном направлении. Для устранения возможности путаницы, будем называть такой импеданс «встречным».

В соответствии с формулой (4.95) встречный входной импеданс в среде 1 при  $x = x_1$  при условии  $A_1 = 0$  принимает вид:

$$Z_1^{(\text{in}B)} = Z_1 \Big|_{x=x_1} = -Z_{10}. \quad (4.143)$$

Для пересчета импеданса от среды 1 к среде 2 воспользуемся формулой (3.138) с обозначениями (4.99)–(4.102), из которой получаем встречный входной импеданс среды 2 при  $x = x_2$ :

$$Z_2^{(\text{in}B)} = Z_{20} \frac{(Z_{20} + Z_1^{(\text{in}B)})e_2 - (Z_{20} - Z_1^{(\text{in}B)})e_2^{-1}}{(Z_{20} + Z_1^{(\text{in}B)})e_2 + (Z_{20} - Z_1^{(\text{in}B)})e_2^{-1}}. \quad (4.144)$$

Аналогично находим встречный входной импеданс среды 3 при  $x = x_3$ :

$$Z_3^{(\text{in}B)} = Z_{30} \frac{(Z_{30} + Z_2^{(\text{in}B)})e_3 - (Z_{30} - Z_2^{(\text{in}B)})e_3^{-1}}{(Z_{30} + Z_2^{(\text{in}B)})e_3 + (Z_{30} - Z_2^{(\text{in}B)})e_3^{-1}}. \quad (4.145)$$

Теперь из граничного условия (4.108) для импедансов на границе 3 получаем:

$$Z_4 \Big|_{x=x_3} = Z_3^{(\text{in}B)}. \quad (4.146)$$

Подставляя в это выражение (4.145), получаем:

$$Z_{40} \frac{A_4 + B_4 e_4}{A_4 - B_4 e_4} = Z_3^{(\text{in}B)}, \quad (4.147)$$

откуда получаем:

$$A_4 = -\frac{Z_{40} + Z_3^{(\text{in}B)}}{Z_{40} - Z_3^{(\text{in}B)}} B_4 e_4. \quad (4.148)$$

Подставляя в это выражение (4.145) и последовательно учитывая (4.144) и (4.143), получаем:

$$A_4 = \frac{D_{A4}}{D_0} B_4 e_4, \quad (4.149)$$

где

$$D_{A4} = [(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30}) + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2^2](Z_{30} - Z_{40}) + [(Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} - Z_{30}) + (Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^2](Z_{30} + Z_{40})e_3^2, \quad (4.150)$$

а  $D_0$  определяется формулой (4.121).

Можно видеть, что найденная здесь амплитуда  $A_4$  совпадает с выражением, полученным прямым методом [57, стр. 69, форм. (4.39)], [1, стр. 230, форм. (5.230)].

#### 4.4.5. Выходящая встречная волна при падении встречной волны

Найдем теперь амплитуду волны  $B_1$ , выходящей из структуры во встречном направлении при  $A_1 = 0$ . Эта амплитуда входит в граничное условие (4.103) для амплитуд на границе 1, из которого получаем:

$$B_1 = A_2 + B_2 e_2. \quad (4.151)$$

Граничное условие для импедансов на той же границе имеет вид:

$$Z_2^{(\text{out}B)} = Z_1^{(\text{in}B)}. \quad (4.152)$$

Из этих двух условий получаем систему уравнений, связывающую  $A_2$  и  $B_2$  с  $B_1$ :

$$A_2 + B_2 e_2 = B_1; \quad (4.153)$$

$$A_2 Z_{10} - B_2 Z_{10} e_2 = -B_1 Z_{20}. \quad (4.154)$$

Решение этой системы, позволяющее выразить  $A_2$  и  $B_2$  через  $B_1$ , имеет вид:

$$A_2 = \frac{Z_{10} - Z_{20}}{2Z_{10}} B_1; \quad (4.155)$$

$$B_2 = \frac{Z_{10} + Z_{20}}{2Z_{10}} B_1 e_2^{-1}. \quad (4.156)$$

Из граничных условий для амплитуд (4.104) и импедансов (4.107) на границе 2 получаем систему уравнений, связывающую  $A_2$  и  $B_2$  с  $A_3$  и  $B_3$ :

$$A_3 + B_3 e_3 = A_2 e_2 + B_2; \quad (4.157)$$

$$A_3 Z_{20} - B_3 Z_{20} e_3 = A_2 Z_{30} e_2 - B_2 Z_{30}. \quad (4.158)$$

Решение этой системы относительно  $A_3$  и  $B_3$  имеет вид:

$$A_3 = \frac{A_2 e_2 Z_{20} + Z_{30} + B_2 (Z_{20} - Z_{30})}{2Z_{20}}; \quad (4.159)$$

$$B_3 = \frac{A_2 e_2 (Z_{20} - Z_{30}) + B_2 (Z_{20} + Z_{30})}{2Z_{20}} e_3^{-1}. \quad (4.160)$$

В этих выражениях  $A_2$  и  $B_2$  определяются формулами (4.155)–(4.156), которые в свою очередь определяются значением  $B_1$ , то есть формулы (4.159)–(4.160) выражают амплитуды  $A_3$  и  $B_3$  в среде 3 через амплитуду волны  $B_1$  в среде 1.

Из граничных условий для амплитуд (4.105) и импедансов (4.108) на границе 3 получаем систему уравнений, связывающую  $A_3$  и  $B_3$  с  $A_4$  и  $B_4$ :

$$A_4 + B_4 e_4 = A_3 e_3 + B_3; \tag{4.161}$$

$$A_4 Z_{30} - B_4 Z_{30} e_4 = A_3 Z_{40} e_3 - B_3 Z_{40}. \tag{4.162}$$

Решение этой системы относительно  $B_4$  имеет вид:

$$B_4 = \frac{A_3 e_3 (Z_{30} - Z_{40}) + B_3 (Z_{30} + Z_{40})}{2Z_{30}} e_4^{-1}. \tag{4.163}$$

Таким образом, получено выражение, которое через посредство (4.159)–(4.160) и (4.155)–(4.156) связывает  $B_4$  с  $B_1$ . Подставляя промежуточные выражения и разрешая полученное уравнение относительно  $B_1$ , получаем:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0} B_4 e_4, \tag{4.164}$$

где

$$D_{B1} = 8Z_{10} Z_{20} Z_{30}, \tag{4.165}$$

а  $D_0$  определяется формулой (4.121).

Можно видеть, что найденная здесь амплитуда  $B_1$  с точностью до направления распространения волны совпадает с выражением, полученным прямым методом [57, стр. 69, форм. (4.34)], [1, стр. 229–230, форм. (5.225)].

### 4.5. Волны в структуре, содержащей пять сред

Рассмотрим теперь случай пяти сред, геометрия которого показана на рис. 4.4.

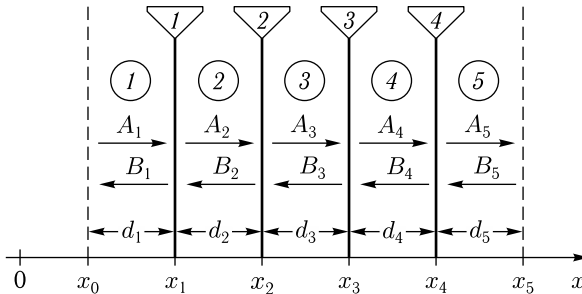


Рис. 4.4. Геометрия структуры из пяти сред

Структура состоит из пяти сред, разделенных четырьмя границами. Обозначения сред, границ, амплитуд и волновых чисел всех волн — аналогичны прежним.

Решения волновых уравнений в областях 1–5, нормированные относительно точек исхода соответствующих волн [1, стр. 112–117], имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (4.166)$$

$$U_2 = A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2 e^{ik_2(x-x_2)}; \quad (4.167)$$

$$U_3 = A_3 e^{-ik_3(x-x_2)} + B_3 e^{ik_3(x-x_3)}; \quad (4.168)$$

$$U_4 = A_4 e^{-ik_4(x-x_3)} + B_4 e^{ik_4(x-x_4)}; \quad (4.169)$$

$$U_5 = A_5 e^{-ik_5(x-x_4)} + B_5 e^{ik_5(x-x_5)}. \quad (4.170)$$

Импедансы сред имеют вид:

$$Z_1 = Z_{10} \frac{A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}}{A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} - B_1 e^{ik_1(x-x_1)}}; \quad (4.171)$$

$$Z_2 = Z_{20} \frac{A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} + B_2 e^{ik_2(x-x_2)}}{A_2 e^{-ik_2(x-x_1)} - B_2 e^{ik_2(x-x_2)}}; \quad (4.172)$$

$$Z_3 = Z_{30} \frac{A_3 e^{-ik_3(x-x_2)} + B_3 e^{ik_3(x-x_3)}}{A_3 e^{-ik_3(x-x_2)} - B_3 e^{ik_3(x-x_3)}}; \quad (4.173)$$

$$Z_4 = Z_{40} \frac{A_4 e^{-ik_4(x-x_3)} + B_4 e^{ik_4(x-x_4)}}{A_4 e^{-ik_4(x-x_3)} - B_4 e^{ik_4(x-x_4)}}; \quad (4.174)$$

$$Z_5 = Z_{50} \frac{A_5 e^{-ik_5(x-x_4)} + B_5 e^{ik_5(x-x_5)}}{A_5 e^{-ik_5(x-x_4)} - B_5 e^{ik_5(x-x_5)}}, \quad (4.175)$$

где нулевые импедансы равны:

$$Z_{10} = \frac{1}{k_1}; \quad (4.176)$$

$$Z_{20} = \frac{1}{k_2}; \quad (4.177)$$

$$Z_{30} = \frac{1}{k_3}; \quad (4.178)$$

$$Z_{40} = \frac{1}{k_4}; \quad (4.179)$$

$$Z_{50} = \frac{1}{k_5}. \quad (4.180)$$

Граничные условия имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (4.181)$$

$$U_2|_{x=x_2} = U_3|_{x=x_2}; \quad (4.182)$$

$$U_3|_{x=x_3} = U_4|_{x=x_3}; \quad (4.183)$$

$$U_4|_{x=x_4} = U_5|_{x=x_4}; \quad (4.184)$$

$$Z_1|_{x=x_1} = Z_2|_{x=x_1}; \quad (4.185)$$



$$Z_2|_{x=x_2} = Z_3|_{x=x_2}; \quad (4.186)$$

$$Z_3|_{x=x_3} = Z_4|_{x=x_3}; \quad (4.187)$$

$$Z_4|_{x=x_4} = Z_5|_{x=x_4}. \quad (4.188)$$

Для упрощения записи введены обозначения:

$$e_1 = e^{-ik_1(x_1-x_0)}; \quad (4.189)$$

$$e_2 = e^{-ik_2(x_2-x_1)}; \quad (4.190)$$

$$e_3 = e^{-ik_3(x_3-x_2)}; \quad (4.191)$$

$$e_4 = e^{-ik_4(x_4-x_3)}; \quad (4.192)$$

$$e_5 = e^{-ik_5(x_5-x_4)}. \quad (4.193)$$

В рассматриваемом случае пяти сред нахождение амплитуд выходящих из структуры волн производится теми же методами, что и для меньшего числа сред (четырёх, трёх), поэтому решение прямым методом опустим полностью, а в решении методом входного импеданса (раздел 3.4) остановимся лишь на ключевых моментах.

#### 4.5.1. Выходящая встречная волна при падении прямой волны

Сначала будем считать, что  $B_5 = 0$ , и входной импеданс будем рассматривать относительно распространения падающей волны в прямом направлении.

Следуя от конца структуры к ее началу, в соответствии с (4.175) при условии  $B_5 = 0$ , получаем входной импеданс среды 5 на границе 4 при  $x = x_4$ :

$$Z_5^{(inA)} = Z_5|_{x=x_4} = Z_{50}. \quad (4.194)$$

Согласно формуле пересчета импеданса с последующей границы на предыдущую (3.119), получаем входной импеданс среды 4 на границе 3 при  $x = x_3$  в обозначениях (4.189)–(4.193):

$$Z_4^{(inA)} = Z_{40} \frac{(Z_{40} + Z_5^{(inA)})e_4^{-1} - (Z_{40} - Z_5^{(inA)})e_4}{(Z_{40} + Z_5^{(inA)})e_4^{-1} + (Z_{40} - Z_5^{(inA)})e_4}. \quad (4.195)$$

Аналогично находим входной импеданс среды 3 при  $x = x_2$ :

$$Z_3^{(inA)} = Z_{30} \frac{(Z_{30} + Z_4^{(inA)})e_3^{-1} - (Z_{30} - Z_4^{(inA)})e_3}{(Z_{30} + Z_4^{(inA)})e_3^{-1} + (Z_{30} - Z_4^{(inA)})e_3}. \quad (4.196)$$

И наконец, находим входной импеданс среды 2 при  $x = x_1$ :

$$Z_2^{(inA)} = Z_{20} \frac{(Z_{20} + Z_3^{(inA)})e_2^{-1} - (Z_{20} - Z_3^{(inA)})e_2}{(Z_{20} + Z_3^{(inA)})e_2^{-1} + (Z_{20} - Z_3^{(inA)})e_2}. \quad (4.197)$$

Из граничного условия (4.185) для импедансов на границе 1 получаем:

$$Z_1|_{x=x_1} = Z_2^{(inA)}. \quad (4.198)$$

Отсюда с помощью выражения для импеданса в первой среде (4.171) получаем

$$Z_{10} \frac{A_1 e_1 + B_1}{A_1 e_1 - B_1} = Z_2^{(\text{in}A)}, \quad (4.199)$$

что позволяет найти  $B_1$ :

$$B_1 = -\frac{Z_{10} + Z_2^{(\text{in}A)}}{Z_{10} - Z_2^{(\text{in}A)}} A_1 e_1. \quad (4.200)$$

Подстановка в это выражение (4.197) с учетом (4.194)–(4.196) дает:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0} A_1 e_1, \quad (4.201)$$

где

$$\begin{aligned} D_0 = & (Z_{10} + Z_{20}) \times \\ & \times \left\{ (Z_{20} + Z_{30}) [(Z_{30} + Z_{40})(Z_{40} + Z_{50}) + (Z_{30} - Z_{40})(Z_{40} - Z_{50})e_4^2] + \right. \\ & + (Z_{20} - Z_{30}) [(Z_{30} - Z_{40})(Z_{40} + Z_{50}) + (Z_{30} + Z_{40})(Z_{40} - Z_{50})e_4^2] e_3^2 \text{Big} \left. + \right. \\ & + (Z_{10} - Z_{20}) \left\{ (Z_{20} - Z_{30}) [(Z_{30} + Z_{40})(Z_{40} + Z_{50}) + (Z_{30} - Z_{40})(Z_{40} - Z_{50})e_4^2] + \right. \\ & \left. \left. + (Z_{20} + Z_{30}) [(Z_{30} - Z_{40})(Z_{40} + Z_{50}) + (Z_{30} + Z_{40})(Z_{40} - Z_{50})e_4^2] e_3^2 \right\} e_2^2; \right. \\ & \left. (4.202) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{B1} = & -(Z_{10} - Z_{20}) \times \\ & \times \left\{ (Z_{20} + Z_{30}) [(Z_{30} + Z_{40})(Z_{40} + Z_{50}) + (Z_{30} - Z_{40})(Z_{40} - Z_{50})e_4^2] + \right. \\ & + (Z_{20} - Z_{30}) [(Z_{30} - Z_{40})(Z_{40} + Z_{50}) + (Z_{30} + Z_{40})(Z_{40} - Z_{50})e_4^2] e_3^2 \left. + \right. \\ & + (Z_{10} + Z_{20}) \left\{ (Z_{20} - Z_{30}) [(Z_{30} + Z_{40})(Z_{40} + Z_{50}) + (Z_{30} - Z_{40})(Z_{40} - Z_{50})e_4^2] + \right. \\ & \left. \left. + (Z_{20} + Z_{30}) [(Z_{30} - Z_{40})(Z_{40} + Z_{50}) + (Z_{30} + Z_{40})(Z_{40} - Z_{50})e_4^2] e_3^2 \right\} e_2^2. \right. \\ & (4.203) \end{aligned}$$

Как и ранее, найденная таким образом амплитуда  $B_1$  совпадает с выражением, полученным прямым методом [57, стр. 67, форм. (4.23), (4.24)], [1, стр. 227, форм. (5.213), (5.214)].

#### 4.5.2. Выходящая прямая волна при падении прямой волны

Найдем теперь амплитуду волны  $A_5$ , выходящей из структуры в прямом направлении. Эта амплитуда входит в граничное условие (4.184) для амплитуд на границе 4, откуда при  $B_5 = 0$  получаем:

$$A_5 = A_4 e_4 + B_4. \quad (4.204)$$

Граничное условие для импедансов на той же границе имеет вид:

$$Z_4^{(\text{out}A)} = Z_5^{(\text{in}A)}. \quad (4.205)$$

Из этих двух условий получаем систему уравнений, связывающую  $A_4$  и  $B_4$  с  $A_5$ :

$$A_4 e_4 + B_4 = A_5; \quad (4.206)$$

$$A_5 Z_{50} e_4 - B_4 Z_{50} = A_5 Z_{40}. \quad (4.207)$$

Решение этой системы, позволяющее выразить  $A_4$  и  $B_4$  через  $A_5$ , имеет вид:

$$A_4 = \frac{Z_{40} + Z_{50}}{2Z_{50}} A_5 e_4^{-1}; \quad (4.208)$$

$$B_4 = -\frac{Z_{40} - Z_{50}}{2Z_{50}} A_5. \quad (4.209)$$

Воспользуемся теперь граничными условиями (4.183) и (4.187) для амплитуд и импедансов на границе 3, из которых получаем систему уравнений:

$$A_3 e_3 + B_3 = A_4 + B_4 e_4; \quad (4.210)$$

$$A_3 Z_{40} e_3 - B_3 Z_{40} = A_4 Z_{30} - B_4 Z_{30} e_4. \quad (4.211)$$

Решения этой системы относительно  $A_3$  и  $B_3$  имеет вид:

$$A_3 = \frac{A_4 Z_{30} + Z_{40}}{2Z_{40}} - \frac{B_4 e_4 (Z_{30} - Z_{40})}{2Z_{40}} e_3^{-1}; \quad (4.212)$$

$$B_3 = \frac{-A_4 (Z_{30} - Z_{40}) + B_4 e_4 (Z_{30} + Z_{40})}{2Z_{40}}. \quad (4.213)$$

В этих выражениях  $A_4$  и  $B_4$  определяются формулами (4.208)–(4.209), которые, в свою очередь, определяются значением  $A_5$ , то есть формулы (4.212)–(4.213) выражают амплитуды  $A_3$  и  $B_3$  в среде 3 через амплитуду волны  $A_5$  в среде 5.

Аналогичным образом из граничных условий на границе 2 получаем систему уравнений:

$$A_2 e_2 + B_2 = A_3 + B_3 e_3; \quad (4.214)$$

$$A_2 Z_{30} e_2 - B_2 Z_{30} = A_3 Z_{20} - B_3 Z_{20} e_3, \quad (4.215)$$

решая которую находим:

$$A_2 = \frac{A_3 (Z_{20} + Z_{30}) - B_3 e_3 (Z_{20} - Z_{30})}{2Z_{30}} e_2^{-1}; \quad (4.216)$$

$$B_2 = \frac{-A_3 (Z_{20} - Z_{30}) + B_3 e_3 (Z_{20} + Z_{30})}{2Z_{30}}. \quad (4.217)$$

В этих выражениях  $A_3$  и  $B_3$  определяются формулами (4.212)–(4.213), которые через посредство формул (4.208)–(4.209) определяются значением  $A_5$ , то есть амплитуды  $A_2$  и  $B_2$  также определяются значением  $A_5$ .

Наконец, из граничных условий (4.181) и (4.185) для границы 1, получаем систему уравнений:

$$A_1 e_1 + B_1 = A_2 + B_2 e_2; \quad (4.218)$$

$$A_1 Z_{20} e_1 - B_1 Z_{20} = A_2 Z_{10} - B_2 Z_{10} e_2, \quad (4.219)$$

решение которой относительно  $A_1$  имеет вид:

$$A_1 = \frac{A_2(Z_{10} + Z_{20}) - B_2 e_2(Z_{10} - Z_{20})}{2Z_{20}} e_1^{-1}. \quad (4.220)$$

В этой формуле  $A_2$  и  $B_2$  посредством (4.216)–(4.217), (4.212)–(4.213) и (4.208)–(4.209) определяются величиной  $A_5$ . Таким образом, получено выражение, связывающее амплитуду выходящей из структуры волны прямого направления  $A_5$  с амплитудой падающей волны того же прямого направления  $A_1$ . Это выражение можно рассматривать как уравнение относительно  $A_5$ , решая которое получаем:

$$A_5 = \frac{D_{A5}}{D_0} \cdot A_1 e_1, \quad (4.221)$$

где

$$D_{A5} = 16Z_{20}Z_{30}Z_{04}Z_{50}, \quad (4.222)$$

а  $D_0$  определяется выражением (4.202).

Как и ранее, найденная таким образом амплитуда  $A_5$  совпадает с выражением, полученным прямым методом [57, стр. 68, форм. (4.31)], [1, стр. 228, форм. (5.221)].

### 4.5.3. Выходящая прямая волна при падении встречной волны

Рассмотрим теперь падение на структуру волны встречного направления с амплитудой  $B_5$ , полагая  $A_1 = 0$ . Как и для четырех сред, входной импеданс будем рассматривать относительно падающей волны в обратном направлении и называть его «встречным».

В соответствии с формулой (4.171) встречный входной импеданс в среде 1 при  $x = x_1$  при условии  $A_1 = 0$  принимает вид:

$$Z_1^{(inB)} = Z_1 \Big|_{x=x_1} = -Z_{10}. \quad (4.223)$$

Для пересчета импеданса от среды 1 к среде 2 воспользуемся формулой (3.138), из которой получаем встречный входной импеданс среды 2 при  $x = x_2$ :

$$Z_2^{(inB)} = Z_{20} \frac{(Z_{20} + Z_1^{(inB)})e_2 - (Z_{20} - Z_1^{(inB)})e_2^{-1}}{(Z_{20} + Z_1^{(inB)})e_2 + (Z_{20} - Z_1^{(inB)})e_2^{-1}}. \quad (4.224)$$

Аналогично находим встречный входной импеданс среды 3 при  $x = x_3$ :

$$Z_3^{(inB)} = Z_{30} \frac{(Z_{30} + Z_2^{(inB)})e_3 - (Z_{30} - Z_2^{(inB)})e_3^{-1}}{(Z_{30} + Z_2^{(inB)})e_3 + (Z_{30} - Z_2^{(inB)})e_3^{-1}}, \quad (4.225)$$

а также встречный входной импеданс среды 4 при  $x = x_4$ :

$$Z_4^{(\text{in}B)} = Z_{40} \frac{(Z_{40} + Z_3^{(\text{in}B)})e_4 - (Z_{40} - Z_3^{(\text{in}B)})e_4^{-1}}{(Z_{40} + Z_3^{(\text{in}B)})e_4 + (Z_{40} - Z_3^{(\text{in}B)})e_4^{-1}}. \quad (4.226)$$

Теперь из граничного условия (4.188) для импедансов на границе 4 получаем:

$$Z_5 \Big|_{x=x_4} = Z_4^{(\text{in}B)}. \quad (4.227)$$

Подставляя в это выражение (4.175), получаем:

$$Z_{50} \frac{A_5 + B_5 e_5}{A_5 - B_5 e_5} = Z_4^{(\text{in}B)}, \quad (4.228)$$

откуда получаем

$$A_5 = - \frac{Z_{50} + Z_4^{(\text{in}B)}}{Z_{50} - Z_4^{(\text{in}B)}} B_5 e_5. \quad (4.229)$$

Подставляя в это выражение (4.226) и последовательно учитывая (4.225), (4.224) и (4.223), получаем:

$$A_5 = \frac{D_{A5}}{D_0} B_5 e_5, \quad (4.230)$$

где

$$\begin{aligned} D_{A5} = & (Z_{10} + Z_{20}) \left\{ (Z_{20} + Z_{30}) [(Z_{30} + Z_{40})(Z_{40} - Z_{50}) + (Z_{30} - Z_{40})(Z_{40} + Z_{50})e_4^2] + \right. \\ & \left. + (Z_{20} - Z_{30}) [(Z_{30} - Z_{40})(Z_{40} - Z_{50}) + (Z_{30} + Z_{40})(Z_{40} + Z_{50})e_4^2] e_3^2 \right\} + \\ & + (Z_{10} - Z_{20}) \left\{ (Z_{20} - Z_{30}) [(Z_{30} + Z_{40})(Z_{40} - Z_{50}) + (Z_{30} - Z_{40})(Z_{40} + Z_{50})e_4^2] + \right. \\ & \left. + (Z_{20} + Z_{30}) [(Z_{30} - Z_{40})(Z_{40} - Z_{50}) + (Z_{30} + Z_{40})(Z_{40} + Z_{50})e_4^2] e_3^2 \right\} e_2^2, \end{aligned} \quad (4.231)$$

а  $D_0$  определяется формулой (4.202).

Можно видеть, что найденная здесь амплитуда  $A_5$  совпадает с выражением, полученным прямым методом [57, стр. 68, форм. (4.31)], [1, стр. 228, форм. (5.221)].

#### 4.5.4. Выходящая встречная волна при падении встречной волны

Найдем теперь амплитуду волны  $B_1$ , выходящей из структуры во встречном направлении при  $A_1 = 0$ . Эта амплитуда входит в граничные условия (4.181) и (4.185) для амплитуд и импедансов на границе 1, из которых можно выразить  $A_2$  и  $B_2$  через  $B_1$  в виде:

$$A_2 = \frac{Z_{10} - Z_{20}}{2Z_{10}} B_1; \quad (4.232)$$

$$B_2 = \frac{Z_{10} + Z_{20}}{2Z_{10}} B_1 e_2^{-1}. \quad (4.233)$$

Из граничных условий для амплитуд (4.182) и импедансов (4.186) на границе 2 выражаем  $A_3$  и  $B_3$  через  $A_2$  и  $B_2$ :

$$A_3 = \frac{A_2 e_2 (Z_{20} + Z_{30}) + B_2 (Z_{20} - Z_{30})}{2Z_{20}}; \quad (4.234)$$

$$B_3 = \frac{A_2 e_2 (Z_{20} - Z_{30}) + B_2 (Z_{20} + Z_{30})}{2Z_{20}} e_3^{-1}. \quad (4.235)$$

Аналогично из граничных условий для амплитуд (4.183) и импедансов (4.187) на границе 3 выражаем  $A_4$  и  $B_4$  через  $A_3$  и  $B_3$ :

$$A_4 = \frac{A_3 e_3 (Z_{30} + Z_{40}) + B_3 (Z_{30} - Z_{40})}{2Z_{30}}; \quad (4.236)$$

$$B_4 = \frac{A_3 e_3 (Z_{30} - Z_{40}) + B_3 (Z_{30} + Z_{40})}{2Z_{30}} e_3^{-1}. \quad (4.237)$$

Наконец, из граничных условий для амплитуд (4.184) и импедансов (4.188) на границе 4 получаем систему уравнений, связывающую  $A_4$  и  $B_4$  с  $A_5$  и  $B_5$ :

$$A_5 + B_5 e_5 = A_4 e_4 + B_4; \quad (4.238)$$

$$A_5 Z_{40} - B_5 Z_{40} e_5 = A_4 Z_{50} e_4 - B_4 Z_{50}. \quad (4.239)$$

Решение этой системы относительно  $B_5$  имеет вид:

$$B_5 = \frac{A_4 e_4 (Z_{40} - Z_{50}) + B_4 (Z_{40} + Z_{50})}{2Z_{40}} e_5^{-1}. \quad (4.240)$$

Таким образом, получено выражение, которое через посредство (4.236)–(4.237), (4.234)–(4.235) и (4.232)–(4.233) связывает  $B_5$  с  $B_1$ . Подставляя промежуточные выражения и разрешая полученное уравнение относительно  $B_1$ , получаем:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0} B_5 e_5, \quad (4.241)$$

где

$$D_{B1} = 16Z_{10}Z_{20}Z_{30}Z_{40}, \quad (4.242)$$

а  $D_0$  определяется формулой (4.202).

Можно видеть, что найденная здесь амплитуда  $B_1$  совпадает с выражением, полученным прямым методом [57, стр. 67, форм. (4.24)], [1, стр. 227, форм. (5.214)].

## 4.6. Волны в структуре, содержащей произвольное число сред

Как можно видеть из предыдущих разделов, приемы получения амплитуд выходящих из структуры волн при падении прямой и встречной волн являются довольно общими и сводятся к пересчету импеданса

или стандартным образом решением системы двух уравнений от последующей среды к предыдущей.

Множественное последовательное повторение этих приемов позволяет найти амплитуды выходящих волн при произвольном числе сред структуры.

Рассмотрим схемы применяемых при этом алгоритмов расчета на примере структуры, содержащей  $N$  сред, разделенных  $N - 1$  границами, геометрия которой показана на рис. 4.5. Номера сред показаны

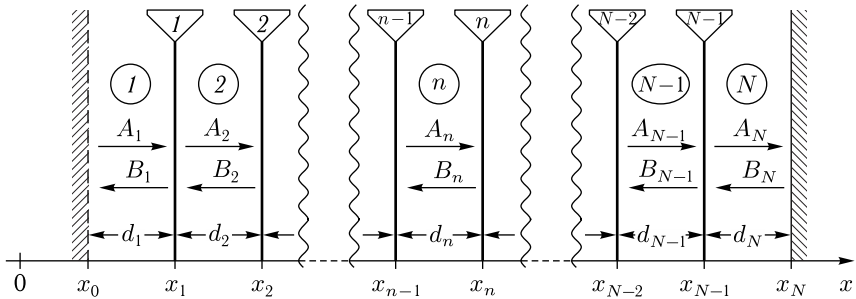


Рис. 4.5. Геометрия структуры из  $N$  сред

цифрами в кругах, номера границ — цифрами в треугольниках, волны прямого направления обозначены через  $A_n$ , волны встречного направления — через  $B_n$ , где  $n$  — номер среды. Расстояния между границами (толщины сред) определяются формулой

$$d_n = x_n - x_{n-1}, \quad (4.243)$$

где  $n$  — номер среды между границами  $n$  и  $n - 1$ . Волновое число в среде с номером  $n$  будем обозначать через  $k_n$ . Таким образом, обозначения сред, границ, амплитуд и волновых чисел всех волн — аналогичны прежним.

Решения волновых уравнений в областях с номерами от 1 до  $N$ , нормированные относительно точек исхода соответствующих волн [1, стр. 112–117], имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (4.244)$$

$$U_n = A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_n)}; \quad (4.245)$$

$$U_N = A_N e^{-ik_N(x-x_{N-1})} + B_N e^{ik_N(x-x_N)}. \quad (4.246)$$

Импедансы сред имеют вид:

$$Z_1 = Z_{10} \frac{A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}}{A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} - B_1 e^{ik_1(x-x_1)}}; \quad (4.247)$$

$$Z_n = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_n)}}{A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} - B_n e^{ik_n(x-x_n)}}; \quad (4.248)$$

$$Z_N = Z_{N0} \frac{A_N e^{-ik_N(x-x_{N-1})} + B_N e^{ik_N(x-x_N)}}{A_N e^{-ik_N(x-x_{N-1})} - B_N e^{ik_N(x-x_N)}}, \quad (4.249)$$

где нулевые импедансы равны:

$$Z_{10} = \frac{1}{k_1}; \dots; \quad (4.250)$$

$$Z_{n0} = \frac{1}{k_n}; \dots; \quad (4.251)$$

$$Z_{N0} = \frac{1}{k_N}. \quad (4.252)$$

Граничные условия имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (4.253)$$

$$U_{n-1}|_{x=x_{n-1}} = U_n|_{x=x_{n-1}}; \quad (4.254)$$

$$U_{N-1}|_{x=x_{N-1}} = U_N|_{x=x_{N-1}}; \quad (4.255)$$

$$Z_1|_{x=x_1} = Z_2|_{x=x_1}; \quad (4.256)$$

$$Z_{n-1}|_{x=x_{n-1}} = Z_n|_{x=x_{n-1}}; \quad (4.257)$$

$$Z_{N-1}|_{x=x_{N-1}} = Z_N|_{x=x_{N-1}}. \quad (4.258)$$

В дальнейшем нам предстоит рассматривать два случая распространения волн — коллинеарное, или нормальное, когда волновой вектор параллелен нормали к границам раздела сред, и неколлинеарное, или наклонное, когда волновой вектор составляет угол  $\theta$  с упомянутой нормалью.

Для упрощения записи в этих случаях далее введем вспомогательные обозначения:

для коллинеарного распространения

$$e_1 = e^{-ik_1(x_1-x_0)} = e^{-ik_1 d_1}; \quad (4.259)$$

$$e_n = e^{-ik_n(x_n-x_{n-1})} = e^{-ik_n d_n}; \quad (4.260)$$

$$e_N = e^{-ik_N(x_N-x_{N-1})} = e^{-ik_N d_N}; \quad (4.261)$$



для неколлинеарного распространения

$$e_{c1} = e^{-ik_1(x_1-x_0) \cos \theta_1} = e^{-ik_1 d_1 \cos \theta_1}; \quad (4.262)$$

$$e_{cn} = e^{-ik_n(x_n-x_{n-1}) \cos \theta_n} = e^{-ik_n d_n \cos \theta_n}; \quad (4.263)$$

$$e_{cN} = e^{-ik_N(x_N-x_{N-1}) \cos \theta_N} = e^{-ik_N d_N \cos \theta_N}. \quad (4.264)$$

Из приведенных в предыдущих разделах примеров, в которых решение задачи о распространении волн осуществляется путем последовательного пересчета, можно видеть, что получение амплитуд выходящих волн осуществляется двумя способами: путем пересчета импедансов и путем пересчета амплитуд.

Пересчет импедансов применяется в тех случаях, когда надо найти амплитуду волны, выходящей в ту же сторону, откуда в структуру входит волна падающая, то есть выходящая волна является как бы отраженной по отношению к падающей. При этом выходящая волна распространяется в направлении, противоположном направлению распространения волны падающей.

Пересчет амплитуд применяется в тех случаях, когда надо найти амплитуду волны, выходящей из структуры в сторону, противоположную той, откуда входит волна падающая, то есть выходящая волна является как бы проходящей по отношению к падающей. При этом выходящая волна распространяется в том же направлении, что и падающая.

Рассмотрим эти способы по отдельности.

#### 4.7. Общая схема пересчета входного импеданса от последующей среды к предыдущей

Рассмотрим общую схему пересчета импедансов на примере падения волны прямого направления.

Конечной задачей расчета является определение амплитуды волны обратного направления, выходящей из структуры в целом, если известна амплитуда волны прямого направления, входящей в структуру в той же точке. При этом амплитуды всех волн прямого и обратного направлений внутри слоев структуры в конечном выражении присутствовать не должны, то есть в ходе промежуточных этапов расчета должны быть исключены.

Будем полагать, что связь между амплитудами входящей и выходящей волн должна быть выражена через импедансы различных сред структуры.

Следующее из определения общее выражение для импеданса в данной среде представляет собой дробь, числитель которой является суммой двух слагаемых, линейно зависящих от амплитуд прямой и встречной волн, а знаменатель — разностью тех же слагаемых.

Определенный так импеданс может не зависеть от амплитуд в двух случаях: если вторые слагаемые дроби, соответствующие встречной

волне, оба равны нулю или если оба эти слагаемые линейно зависят от той же амплитуды, что и первые слагаемые, соответствующие прямой волне.

В обоих этих случаях числитель и знаменатель дроби линейно зависят от амплитуды прямой волны, на которую можно произвести сокращение, в результате чего зависимость импеданса от каких-либо амплитуд пропадает.

Первый этап решения задачи состоит в записи решений волновых уравнений в каждой из сред в виде суммы прямой и встречной волн с произвольными амплитудами. При этом в силу произвольности амплитуд какие-либо линейные зависимости между слагаемыми явно не выражены, то есть второй случай независимости импедансов от амплитуд не реализуется. Однако, если считать, что после выхода из структуры волна далее ни от чего не отражается, то есть в последней среде встречная волна отсутствует, то реализуется первый случай, когда вторые слагаемые дроби равны нулю, так что импеданс в последней среде от амплитуды не зависит.

Теперь из граничного условия равенства импедансов между последней и предпоследней средами можно получить уравнение, в которое в качестве неизвестных будут входить амплитуды прямой и встречной волн в предпоследней среде, выраженные через не зависящий от амплитуд импеданс последней среды. Это уравнение позволяет найти линейную зависимость амплитуды встречной волны в предпоследней среде от амплитуды прямой волны в той же среде, то есть будут созданы условия для реализации второго случая независимости от амплитуды импеданса предпоследней среды.

Далее из граничного условия между предпоследней и предшествующей ей средами можно найти не зависящий от амплитуды импеданс в этой предшествующей среде.

Переходя таким образом последовательно от конца структуры к ее началу, то есть осуществляя пересчет входного импеданса от последующей среды к предыдущей, в конечном счете можно найти входной импеданс в первой среде, выражение для которого от амплитуд каких-либо волн зависеть не будет, что и позволит найти амплитуду волны обратного направления в первой среде, то есть решит изначально поставленную задачу.

Как следует из проделанного рассмотрения, необходимым условием возможности такого пересчета является отсутствие встречной волны в последней среде.

#### **4.8. Реализация общей схемы пересчета импеданса на примере трех сред**

Рассмотрим теперь реализацию описанной общей схемы пересчета входного импеданса от последующей среды к предыдущей на примере структуры из трех сред, разделенных двумя границами. Для удобства

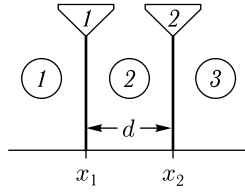


Рис. 4.6. Схема нумерации сред и границ для трех сред

введем нумерацию сред и границ между ними, иллюстрируемую рис. 4.6. Координаты границ обозначим через  $x_1$  и  $x_2$ , а расстояние между ними через  $d$ .

Сначала рассмотрим случай падения волны прямого направления, то есть от среды 1 к среде 2. Импедансы, соответствующие этому случаю, будем обозначать дополнительным индексом «А».

Пусть известен входной импеданс среды 3 на границе 2, который не зависит от каких-либо амплитуд. Необходимым условием такой независимости является отсутствие встречной волны в среде 3. Обозначим этот импеданс через  $Z_3^{(\text{inA})}$ . Задача состоит в том, чтобы найти входной импеданс среды 2, то есть  $Z_2^{(\text{inA})}$ .

Общее выражение для импеданса в среде 2 имеет вид:

$$Z_2 = Z_{20} \frac{C e^{-ik_2 x} + D e^{ik_2 x}}{C e^{-ik_2 x} - D e^{ik_2 x}}. \quad (4.265)$$

Из условия равенства импедансов на границе 2 получаем:

$$Z_{20} \frac{C e^{-ik_2 x_2} + D e^{ik_2 x_2}}{C e^{-ik_2 x_2} - D e^{ik_2 x_2}} = Z_3^{(\text{inA})}. \quad (4.266)$$

Отсюда находим  $D$  через  $C$ :

$$D = - \frac{Z_{20} - Z_3^{(\text{inA})}}{Z_{20} + Z_3^{(\text{inA})}} e^{-2ik_2 x_2} C. \quad (4.267)$$

Подставляя (4.267) в (4.265), сокращая на  $C$  и умножая числитель и знаменатель дроби на  $e^{ik_2 x_2}$ , получаем:

$$Z_2 = Z_{20} \frac{(Z_{20} + Z_3^{(\text{inA})}) e^{ik_2(x_2-x)} - (Z_{20} - Z_3^{(\text{inA})}) e^{-ik_2(x_2-x)}}{(Z_{20} + Z_3^{(\text{inA})}) e^{ik_2(x_2-x)} + (Z_{20} - Z_3^{(\text{inA})}) e^{-ik_2(x_2-x)}}. \quad (4.268)$$

Входной импеданс среды 2 соответствует  $x = x_1$ . Учитывая обозначение  $x_2 - x_1 = d$ , получаем:

$$Z_2^{(\text{inA})} = Z_{20} \frac{(Z_{20} + Z_3^{(\text{inA})}) e^{ik_2 d} - (Z_{20} - Z_3^{(\text{inA})}) e^{-ik_2 d}}{(Z_{20} + Z_3^{(\text{inA})}) e^{ik_2 d} + (Z_{20} - Z_3^{(\text{inA})}) e^{-ik_2 d}}, \quad (4.269)$$

что совпадает с полученной в разделе 4.3.3 формулой (4.58).

Эта формула соответствует случаю падения на структуру из среды 1 волны прямого направления, что отражено дополнительным верхним индексом «А».

Для случая падения волны встречного направления из среды 3, при условии отсутствия прямой волны в среде 1, путем аналогичных рассуждений получаем:

$$Z_2^{(\text{inB})} = Z_{20} \frac{(Z_{20} + Z_1^{(\text{inB})})e^{-ik_2d} - (Z_{20} - Z_1^{(\text{inB})})e^{ik_2d}}{(Z_{20} + Z_1^{(\text{inB})})e^{-ik_2d} + (Z_{20} - Z_1^{(\text{inB})})e^{ik_2d}}. \quad (4.270)$$

В этой формуле факт падения на структуру из среды 3 волны обратного направления отражен дополнительным верхним индексом «В». Можно видеть, что полученная формула (4.270) совпадает с найденной в разделе 4.3.5 формулой (4.75).

#### 4.9. Пересчет импеданса при произвольном числе сред

Полученные здесь формулы (4.269) и (4.270) применимы для любой из внутренних сред структуры при любом числе слоев. Рассмотрим сред с произвольным номером  $n$ , заключенную между двумя границами с номерами  $n - 1$  и  $n + 1$ , расстояние между которыми  $d_n$  определяется формулой (4.243). Схема участка структуры для сред от  $n - 1$  до  $n + 1$  показана на рис. 4.7.

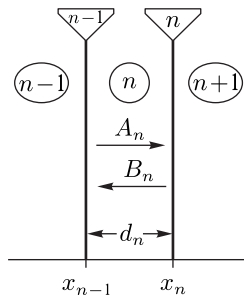


Рис. 4.7. Схема нумерации сред и границ для сред с номерами  $n - 1$ ,  $n$ ,  $n + 1$

В случае падения на структуру волны прямого направления из среды с начальным номером 1 при отсутствии встречной волны в среде с конечным номером  $N$ , формула пересчета входного импеданса от среды с номером  $n + 1$  к среде с номером  $n$  имеет вид:

$$Z_n^{(\text{inA})} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(\text{inA})})e^{ik_n d_n} - (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(\text{inA})})e^{-ik_n d_n}}{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(\text{inA})})e^{ik_n d_n} + (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(\text{inA})})e^{-ik_n d_n}}. \quad (4.271)$$

Для упрощения записи введем обозначения, подобные (4.189)–(4.193):

$$e_n = e^{-ik_n(x_n - x_{n-1})}, \quad (4.272)$$

при которых формула (4.271) принимает вид:

$$Z_n^{(\text{in}A)} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(\text{in}A)})e_n^{-1} - (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(\text{in}A)})e_n}{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(\text{in}A)})e_n^{-1} + (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(\text{in}A)})e_n}. \quad (4.273)$$

Для случая падения волны встречного направления из среды с конечным номером  $N$ , при условии отсутствия прямой волны в среде  $1$ , аналогичная формула имеет вид:

$$Z_n^{(\text{in}B)} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n-1}^{(\text{in}B)})e^{-ik_n d_n} - (Z_{n0} - Z_{n-1}^{(\text{in}B)})e^{ik_n d_n}}{(Z_{n0} + Z_{n-1}^{(\text{in}B)})e^{-ik_n d_n} + (Z_{n0} - Z_{n-1}^{(\text{in}B)})e^{ik_n d_n}}, \quad (4.274)$$

или с обозначениями (4.272):

$$Z_n^{(\text{in}B)} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n-1}^{(\text{in}B)})e_n - (Z_{n0} - Z_{n-1}^{(\text{in}B)})e_n^{-1}}{(Z_{n0} + Z_{n-1}^{(\text{in}B)})e_n + (Z_{n0} - Z_{n-1}^{(\text{in}B)})e_n^{-1}}. \quad (4.275)$$

Можно видеть, что при  $n = 2$  эти формулы переходят в (4.269) и (4.270).

#### 4.9.1. Применение пересчета импеданса для получения амплитуд выходящих волн

Получение амплитуд выходящих из структуры волн путем пересчета импедансов применимо в двух случаях: для определения амплитуды выходящей встречной волны при падении прямой волны и для определения амплитуды выходящей прямой волны при падении встречной волны. То есть выходящая волна должна быть как бы отраженной по отношению к падающей. Рассмотрим оба эти случая по отдельности.

#### 4.9.2. Выходящая встречная волна при падении прямой волны

Сначала будем считать, что  $B_N = 0$  и входной импеданс будем рассматривать относительно распространения падающей волны в прямом направлении.

Следуя от конца структуры к ее началу, то есть от  $N$  к  $1$ , в соответствии с (4.270) при условии  $B_N = 0$ , получаем входной импеданс среды  $N$  на границе  $N - 1$  при  $x = x_{N-1}$ :

$$Z_N^{(\text{in}A)} = Z_N \Big|_{x=x_{N-1}} = Z_{N0}. \quad (4.276)$$

Дальнейший ход расчета состоит в последовательном пересчете этого импеданса из среды  $N$  до среды  $1$  с помощью формулы пересчета (4.273):

$$Z_n^{(\text{in}A)} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(\text{in}A)})e_n^{-1} - (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(\text{in}A)})e_n}{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(\text{in}A)})e_n^{-1} + (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(\text{in}A)})e_n}, \quad (4.277)$$

где  $n$  последовательно принимает значения от  $N - 1$  до  $2$ . Таким образом, получается цепь формул, первая из которых дает импеданс  $Z_{N-1}^{(\text{in}A)}$ ,

выраженный через  $Z_N^{(\text{in}A)}$ , вторая — импеданс  $Z_{N-2}^{(\text{in}A)}$ , выраженный через  $Z_{N-1}^{(\text{in}A)}$ , третья —  $Z_{N-3}^{(\text{in}A)}$ , выраженный через  $Z_{N-2}^{(\text{in}A)}$  и так далее вплоть до импеданса среды 2, выраженного через импеданс среды 3. Последовательная подстановка в эти формулы промежуточных импедансов от  $Z_{N-1}^{(\text{in}A)}$  до  $Z_3^{(\text{in}A)}$  позволяет найти входной импеданс среды 2 —  $Z_2^{(\text{in}A)}$ , который, в соответствии с (4.276), в конечном счете может быть выражен через  $Z_{N0}$ , то есть может быть получено выражение:

$$Z_2^{(\text{in}A)} = Z_2^{(\text{in}A)}(Z_{N0}). \quad (4.278)$$

Теперь, обращаясь к граничному условию для импедансов на границе 1, получаем:

$$Z_1|_{x=x_1} = Z_2^{(\text{in}A)}, \quad (4.279)$$

откуда с помощью выражения (4.268) для импеданса в первой среде, получаем:

$$Z_{10} \frac{A_1 e_1 + B_1}{A_1 e_1 - B_1} = Z_2^{(\text{in}A)}, \quad (4.280)$$

что позволяет найти  $B_1$ :

$$B_1 = -\frac{Z_{10} + Z_2^{(\text{in}A)}}{Z_{10} - Z_2^{(\text{in}A)}} A_1 e_1. \quad (4.281)$$

Подставляя в эту формулу выражение  $Z_2^{(\text{in}A)}$  в соответствии с (4.279), получаем:

$$B_1 = -\frac{Z_{10} + Z_2^{(\text{in}A)}(Z_{N0})}{Z_{10} - Z_2^{(\text{in}A)}(Z_{N0})} A_1 e_1. \quad (4.282)$$

Таким образом, получено выражение амплитуды волны встречного направления при падении прямой волны через нулевые импедансы первой и последней сред.

### 4.9.3. Выходящая прямая волна при падении встречной волны

Рассмотрим теперь падение на структуру волны встречного направления с амплитудой  $B_N$ , полагая  $A_1 = 0$ . При этом входной импеданс будем рассматривать относительно падающей волны в обратном направлении и называть его «встречным».

Как и в предыдущем случае, при пересчете импеданса будем следовать от более удаленного от точки падения волны конца структуры к менее удаленному, то есть от среды 1 к среде  $N$ .

Из граничного условия на границе 1 при  $x = x_1$  получаем встречный входной импеданс в среде 1 при условии  $A_1 = 0$ :

$$Z_1^{(\text{in}B)} = Z_1|_{x=x_1} = -Z_{10}. \quad (4.283)$$

Дальнейший ход расчета состоит в последовательном пересчете этого импеданса от среды  $1$  до среды  $N$  с помощью формулы пересчета (4.275):

$$Z_n^{(\text{in}B)} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n-1}^{(\text{in}B)})e_n - (Z_{n0} - Z_{n-1}^{(\text{in}B)})e_n^{-1}}{(Z_{n0} + Z_{n-1}^{(\text{in}B)})e_n + (Z_{n0} - Z_{n-1}^{(\text{in}B)})e_n^{-1}}, \quad (4.284)$$

где  $n$  последовательно принимает значения от 2 до  $N - 2$ . Таким образом получается цепь формул, первая из которых дает импеданс  $Z_2^{(\text{in}B)}$ , выраженный через  $Z_1^{(\text{in}B)}$ , вторая — импеданс  $Z_3^{(\text{in}B)}$ , выраженный через  $Z_2^{(\text{in}B)}$ , третья —  $Z_4^{(\text{in}B)}$ , выраженный через  $Z_3^{(\text{in}B)}$  и так далее вплоть до импеданса среды  $N$ , выраженного через импеданс среды  $N - 1$ . Последовательная подстановка в эти формулы промежуточных импедансов от  $Z_1^{(\text{in}B)}$  до  $Z_{N-2}^{(\text{in}B)}$  позволяет найти встречный входной импеданс среды  $N - 1$ , то есть  $Z_{N-1}^{(\text{in}B)}$ , который, в соответствии с (4.277), в конечном счете может быть выражен через  $Z_{N0}$ , то есть может быть получено выражение:

$$Z_{N-1}^{(\text{in}B)} = Z_{N-1}^{(\text{in}B)}(Z_{10}). \quad (4.285)$$

Теперь из граничного условия для импедансов на границе  $N - 1$  получаем:

$$Z_N \Big|_{x=x_{N-1}} = Z_{N-1}^{(\text{in}B)}. \quad (4.286)$$

Подставляя в это выражение (4.270), получаем:

$$Z_{N0} \frac{A_N + B_N e_N}{A_N - B_N e_N} = Z_{N-1}^{(\text{in}B)}, \quad (4.287)$$

откуда получаем

$$A_N = - \frac{Z_{N0} + Z_{N-1}^{(\text{in}B)}}{Z_{N0} - Z_{N-1}^{(\text{in}B)}} B_N e_N. \quad (4.288)$$

Подставляя в эту формулу выражение  $Z_{N-1}^{(\text{in}B)}$  в соответствии с (4.285), получаем:

$$A_N = - \frac{Z_{N0} + Z_{N-1}^{(\text{in}B)}(Z_{10})}{Z_{N0} - Z_{N-1}^{(\text{in}B)}(Z_{10})} B_N e_N. \quad (4.289)$$

Таким образом, получено выражение амплитуды волны прямого направления при падении встречной волны, определяемое через нулевые импедансы первой и последней сред.

#### 4.10. Общая схема пересчета амплитуд от последующей среды к предыдущей

Рассмотрим общую схему пересчета амплитуд на примере падения волны прямого направления.

Конечной задачей расчета является определение амплитуды волны прямого направления, выходящей из структуры в целом, если известна

амплитуды волны прямого направления, входящей в структуру с другой ее стороны. При этом амплитуды всех волн прямого и обратного направлений внутри слоев структуры в конечном выражении присутствовать не должны, то есть в ходе промежуточных этапов расчета должны быть исключены.

Будем полагать, что связь между амплитудами входящей и выходящей волн должна быть выражена через импедансы различных сред структуры.

Амплитуда волны, выходящей из структуры в прямом направлении, входит в граничное условие для амплитуд на последней границе структуры. При отсутствии падения волны встречного направления в последней среде структуры присутствует только одна волна прямого направления, амплитуду которой и требуется найти. При этом граничные условия для амплитуд и импедансов на последней границе структуры позволяют построить систему двух уравнений, связывающую три переменных: две амплитуды волн прямого и встречного направлений в предпоследней среде структуры третью амплитуду — волны, распространяющейся в последней среде в прямом направлении.

Разрешение такой системы позволяет выразить обе амплитуды волн в предпоследней среде через единственную амплитуду волны в последней среде, которая в конечном счете является искомой.

Граничные условия для амплитуд и импедансов на предпоследней границе структуры позволяют выразить амплитуды волн в предшествующей предпоследней среде через амплитуды волн в предпоследней среде, которые уже выражены через искомую амплитуду в последней среде. При этом из получающихся выражений промежуточные амплитуды, соответствующие предпоследней среде, будут исключены. Повторение подобной процедуры достаточное число раз позволяет получить выражение, связывающие амплитуды двух волн в первой среде, с подлежащей определению амплитудой волны в последней среде, из которого амплитуды всех промежуточных волн будут исключены.

Из упомянутых волн в первой среде одна является падающей, то есть заданной изначально условиями задачи, а амплитуда второй может быть определена через амплитуду этой падающей волны методом пересчета импедансов. Таким образом, можно получить выражение, связывающее амплитуду падающей волны прямого направления в первой среде с амплитудой выходящей волны также прямого направления в последней среде. Разрешение этого соотношения относительно амплитуды выходящей волны дает решение поставленной задачи.

Поскольку на конечном этапе расчета используется амплитуда встречной волны в первой среде, полученная методом пересчета импеданса, то, как и для упомянутого метода, для пересчета амплитуд необходимым условием возможности решения задачи является отсутствие встречной волны в последней среде.



### 4.11. Реализация общей схемы пересчета амплитуд на примере трех сред

Рассмотрим теперь реализацию описанной общей схемы пересчета амплитуд импеданса от последующей среды к предыдущей на примере структуры из трех сред, разделенных двумя границами. Воспользуемся той же геометрией, что на рис. 4.6, представленной здесь в виде рис. 4.8, где введена та же нумерация сред и границ между ними. Как и ранее, координаты границ обозначены через  $x_1$  и  $x_2$ , а расстояние между ними через  $d$ .

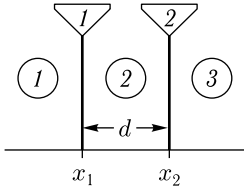


Рис. 4.8. Схема нумерации сред и границ для трех сред

Сначала рассмотрим случай падения волны прямого направления, то есть от среды 1 к среде 2.

Найдем амплитуду волны  $A_3$ , выходящей из структуры в прямом направлении. Из граничных условий для амплитуд и импедансов на границе 2 при  $B_3 = 0$  получаем систему уравнений:

$$A_2 e_2 + B_2 = A_3; \quad (4.290)$$

$$A_3 Z_{30} e_2 - B_2 Z_{30} = A_3 Z_{20}. \quad (4.291)$$

Решение этой системы, позволяющее выразить  $A_2$  и  $B_2$  через  $A_3$ , имеет вид:

$$A_2 = \frac{Z_{20} + Z_{30}}{2Z_{30}} A_3 e_2^{-1}; \quad (4.292)$$

$$B_2 = -\frac{Z_{20} - Z_{30}}{2Z_{30}} A_3. \quad (4.293)$$

Из граничных условий для амплитуд и импедансов на границе 1 получаем систему уравнений:

$$A_1 e_1 + B_1 = A_2 + B_2 e_2; \quad (4.294)$$

$$A_1 Z_{20} e_1 - B_1 Z_{20} = A_2 Z_{10} - B_2 Z_{10} e_2, \quad (4.295)$$

решение которой относительно  $A_1$  и  $B_1$  имеет вид:

$$A_1 = \frac{A_2 Z_{10} + Z_{20}) - B_2 e_2 Z_{10} - Z_{20})}{2Z_{20}} e_1^{-1}; \quad (4.296)$$

$$B_1 = \frac{-A_2 (Z_{10} - Z_{20}) + B_2 e_2 (Z_{10} + Z_{20})}{2Z_{20}}. \quad (4.297)$$

Эти выражения дают возможность найти амплитуды  $A_1$  и  $B_1$ , если известны амплитуды  $A_2$  и  $B_2$ , то есть пересчитать амплитуды в последующей среде в амплитуды в предыдущей.

В конечном счете, разрешая получаемое из (4.296) уравнение относительно  $A_3$ , можно получить выражение для амплитуды выходящей из

структуры волны прямого направления  $A_3$  через амплитуду падающей волны прямого направления  $A_1$ :

$$A_3 = \frac{4Z_{20}Z_{30}}{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}} A_1 e_1, \quad (4.298)$$

совпадающее с полученным прямым методом [1, стр. 129, форм. (3.177)].

Для случая падения волны встречного направления, то есть от среды 3 к среде 2 при заданной амплитуде  $B_3$  аналогичные (4.292)–(4.293) и (4.296)–(4.297) формулы для пересчета амплитуд имеют вид:

$$A_2 = \frac{Z_{10} - Z_{20}}{2Z_{10}} B_1; \quad (4.299)$$

$$B_2 = \frac{Z_{10} + Z_{20}}{2Z_{10}} B_1 e_2^{-1}; \quad (4.300)$$

$$A_3 = \frac{A_2 e_2 (Z_{20} + Z_{30}) + B_2 (Z_{20} - Z_{30})}{2Z_{20}}; \quad (4.301)$$

$$B_3 = \frac{A_2 e_2 (Z_{20} - Z_{30}) + B_2 (Z_{20} + Z_{30})}{2Z_{20}} e_3^{-1}. \quad (4.302)$$

Подставляя первую пару этих выражений во вторую и разрешая полученное второе уравнение относительно  $B_1$ , получаем:

$$B_1 = \frac{4Z_{10}Z_{20}}{(Z_{10} - Z_{20})(Z_{20} - Z_{30})e_2 + (Z_{10} + Z_{20})(Z_{20} + Z_{30})e_2^{-1}} B_3 e_3 \quad (4.303)$$

что с точностью до направления распространения волны совпадает с аналогичной амплитудой, получаемой прямым методом [1, стр. 129, форм. (3.177)].

## 4.12. Пересчет амплитуд при произвольном числе сред

Получение амплитуд выходящих из структуры волн путем пересчета амплитуд применимо в двух случаях: для определения амплитуды выходящей прямой волны при падении прямой волны и для определения амплитуды выходящей встречной волны при падении встречной волны. То есть выходящая волна должна быть как бы проходящей по отношению к падающей.

Будем рассматривать среду с произвольным номером  $n$ , заключенную между двумя границами с номерами  $n - 1$  и  $n$ . Воспользуемся той же геометрией, что на рис. 4.7, представленной здесь в виде рис. 4.9, где введена та же нумерация сред и границ между ними. Как и ранее, координаты границ обозначены через  $x_{n-1}$  и  $x_n$ , а расстояние между ними через  $d_n$ .

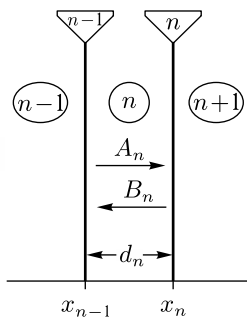


Рис. 4.9. Схема нумерации сред и границ для сред с номерами  $n - 1$ ,  $n$ ,  $n + 1$

**4.12.1. Выходящая прямая волна при падении прямой волны**

Найдем амплитуду волны  $A_n$ , выходящей из структуры в прямом направлении. Эта амплитуда входит в граничное условие для амплитуд на границе  $n - 1$ , откуда при  $B_n = 0$  получаем:

$$A_n = A_{n-1}e_{n-1} + B_{n-1}. \quad (4.304)$$

Граничное условие для импедансов на той же границе имеет вид:

$$Z_{n-1}^{(\text{out}A)} = Z_n^{(\text{in}A)}. \quad (4.305)$$

Из этих двух условий получаем систему уравнений, связывающую  $A_{n-1}$  и  $B_{n-1}$  с  $A_n$ :

$$A_{n-1}e_{n-1} + B_{n-1} = A_n; \quad (4.306)$$

$$A_n Z_{n0} e_{n-1} - B_{n-1} Z_{n0} = A_n Z_{(n-1)0}. \quad (4.307)$$

Решение этой системы, позволяющее выразить  $A_{n-1}$  и  $B_{n-1}$  через  $A_n$ , имеет вид:

$$A_{n-1} = \frac{Z_{(n-1)0} + Z_{n0}}{2Z_{n0}} A_n e_{n-1}^{-1}; \quad (4.308)$$

$$B_{n-1} = -\frac{Z_{(n-1)0} - Z_{n0}}{2Z_{n0}} A_n. \quad (4.309)$$

Воспользуемся теперь граничными условиями для амплитуд и импедансов на границе с номером  $n$ , из которых получаем систему уравнений:

$$A_n e_n + B_n = A_{n+1} + B_{n+1} e_{n+1}; \quad (4.310)$$

$$A_n Z_{(n+1)0} e_n - B_n Z_{(n+1)0} = A_{n+1} Z_{n0} - B_{n+1} Z_{n0} e_{n+1}. \quad (4.311)$$

Решение этой системы относительно  $A_n$  и  $B_n$  имеет вид:

$$A_n = \frac{A_{n+1}(Z_{n0} + Z_{(n+1)0}) - B_{n+1}e_{n+1}(Z_{n0} - Z_{(n+1)0})}{2Z_{(n+1)0}} e_n^{-1}; \quad (4.312)$$

$$B_n = \frac{-A_{n+1}(Z_{n0} - Z_{(n+1)0}) + B_{n+1}e_{n+1}(Z_{n0} + Z_{(n+1)0})}{2Z_{(n+1)0}}. \quad (4.313)$$

Эти выражения дают возможность найти амплитуды  $A_n$  и  $B_n$ , если известны амплитуды  $A_{n+1}$  и  $B_{n+1}$ , то есть пересчитать амплитуды в последующей среде в амплитуды в предыдущей.

Последовательное применение формул (4.312)–(4.313) от среды  $n - 1$  до среды  $1$  позволяет выразить амплитуды  $A_1$  и  $B_1$  через амплитуды  $A_{n-1}$  и  $B_{n-1}$ , каждая из которых, в соответствии

с (4.308)–(4.309) может быть выражена через  $A_n$ . При этом для амплитуды  $A_1$  получаем выражение вида:

$$A_1 = A_1(A_n). \quad (4.314)$$

Таким образом, получено выражение, связывающее амплитуду выходящей из структуры волны прямого направления  $A_n$  с амплитудой падающей волны того же прямого направления  $A_1$ . Это выражение можно рассматривать как уравнение относительно  $A_n$ .

Из характера выражений (4.308)–(4.309) и (4.312)–(4.313) можно видеть, что последовательная подстановка амплитуд от  $A_n$  до  $A_2$ ,  $B_2$  приводит к линейному уравнению первого порядка для  $A_n$  относительно  $A_1$ , аналитическое разрешение которого не представляет труда и дает в результате выражение вида:

$$A_n = \frac{D_{An}}{D_0} A_1 e_1, \quad (4.315)$$

где  $D_{An}$  и  $D_0$  содержат только нулевые импедансы всех сред, а конкретный вид этих выражений определяется упомянутыми последовательными подстановками.

#### 4.12.2. Выходящая встречная волна при падении встречной волны

Найдем теперь амплитуду волны  $B_1$ , выходящей из структуры во встречном направлении при  $A_1 = 0$ . Эта амплитуда входит в граничные условия для амплитуд и импедансов на границе  $I$ , из которых можно выразить  $A_2$  и  $B_2$  через  $B_1$  в виде:

$$A_2 = \frac{Z_{10} - Z_{20}}{2Z_{10}} B_1; \quad (4.316)$$

$$B_2 = \frac{Z_{10} + Z_{20}}{2Z_{10}} B_1 e_2^{-1}. \quad (4.317)$$

Воспользуемся теперь граничными условиями для амплитуд и импедансов на границе с номером  $n$ , из которых получаем систему уравнений (по форме совпадающую с (4.311)):

$$A_{n+1} + B_{n+1} e_{n+1} = A_n e_n + B_n; \quad (4.318)$$

$$A_{n+1} Z_{n0} - B_{n+1} Z_{n0} e_{n+1} = A_n Z_{(n+1)0} e_n - B_n Z_{(n+1)0}. \quad (4.319)$$

Решение этой системы относительно  $A_{n+1}$  и  $B_{n+1}$  имеет вид:

$$A_{n+1} = \frac{A_n e_n (Z_{n0} + Z_{(n+1)0}) + B_n (Z_{n0} - Z_{(n+1)0})}{2Z_{n0}}; \quad (4.320)$$

$$B_{n+1} = \frac{A_n e_n (Z_{n0} - Z_{(n+1)0}) + B_n (Z_{n0} + Z_{(n+1)0})}{2Z_{n0}} e_{n+1}^{-1}. \quad (4.321)$$

Эти выражения дают возможность найти амплитуды  $A_{n+1}$  и  $B_{n+1}$ , если известны амплитуды  $A_n$  и  $B_n$ , то есть пересчитать амплитуды в предыдущей среде в амплитуды в последующей.

Последовательное применение формул (4.320)–(4.321) от среды 2 до среды  $n$  позволяет выразить амплитуды  $A_n$  и  $B_n$  через амплитуды  $A_2$  и  $B_2$ , каждая из которых, в соответствии с (4.316)–(4.317) может быть выражена через  $B_1$ . При этом для амплитуды  $B_n$  получаем выражение вида:

$$B_n = B_n(B_1). \quad (4.322)$$

Таким образом, получено выражение, связывающее амплитуду выходящей из структуры волны встречного направления  $B_1$  с амплитудой падающей волны того же встречного направления  $B_n$ . Это выражение можно рассматривать как уравнение относительно  $B_1$ .

Из характера выражений (4.316)–(4.317) и (4.320)–(4.321) можно видеть, что (4.322) имеет вид линейного уравнения первого порядка относительно  $B_1$ , аналитическое разрешение которого не представляет труда и дает в результате выражение вида:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0} B_n e_n, \quad (4.323)$$

где  $D_{B1}$  и  $D_0$  содержат только нулевые импедансы всех сред, а конкретный вид этих выражений определяется упомянутыми последовательными подстановками.

## Выводы по главе 4

Данная глава посвящена описанию применения метода входного и выходного импедансов для решения задач о распространении одномерных волн прямого и встречного направлений через многослойные структуры. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено распространение волн в структурах, содержащих от двух до пяти сред при условии задания начальной и конечной точек распространения. Отмечено, что для двух сред метод импеданса не имеет преимуществ по сравнению с прямым методом, однако начиная с трех сред и более, особенно при учете волн обоих направлений, метод импеданса позволяет существенно сократить объем вычислений, то есть является предпочтительным.

2. Для структур, содержащих от трех до пяти сред методом импеданса отдельности найдены амплитуды выходящей прямой и встречной волн при падении прямой волны, а также амплитуды тех же волн при падении встречной волны. Сравнение конечных результатов с данными, полученными прямым методом, показывает полное соответствие.

3. Рассмотрено применение метода последовательного пересчета импеданса для решения задач о распространении волн обоих направле-

---

ний в структуре, содержащей произвольное число сред. Отмечено, что получение амплитуд выходящих волн осуществимо двумя способами: путем пересчета импедансов и путем пересчета амплитуд.

4. Рассмотрена методология и приведена общая схема пересчета входного импеданса от последующей среды к предыдущей. Схема реализована на примере структуры из трех сред, после чего полученные результаты обобщены на случай произвольного числа сред.

5. Рассмотрена методология и приведена общая схема пересчета амплитуды распространяющейся волны от последующей среды к предыдущей. Схема реализована на примере структуры из трех сред, после чего полученные результаты обобщены на случай произвольного числа сред.

## Глава 5

# **ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ИМПЕДАНСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**

Глава посвящена распространению волн прямого и встречного направлений в структурах, содержащих произвольное число сред. Наряду с одномерными рассмотрены акустические и электромагнитные волны различных поляризаций для случаев нормального и наклонного падения. Ввиду общности наблюдаемых явлений, подробности математического аппарата описаны в едином ключе с одинаковой последовательностью. В целом материал главы можно рассматривать как свод конечных результатов, опирающихся на данные предыдущих глав, а необходимые промежуточные выкладки любознательному читателю авторы рекомендуют выполнить в качестве полезного упражнения.

В главе частично использован материал монографии [59, стр. 115–131]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### **5.1. Замечание о единообразии применения импедансных методов для различных случаев**

В главе 4 показано, что использование обобщенного импеданса позволяет находить амплитуды отраженной и проходящей волн при падении волн прямого и встречного направлений путем пересчета входного импеданса, сводящегося к решению системы двух линейных уравнений от выхода структуры к ее входу для падающей волны. Здесь более подробно остановимся на методике пересчета для различных типов волн. Еще раз обратимся к одномерным волнам, а также рассмотрим акустические волны в жидкости и электромагнитные волны в средах, обладающих диэлектрической и магнитной проницаемостями для случаев нормального и наклонного падения волн.

В главе 3 показано, что решения волновых уравнений, формулы для импедансов и граничные условия для всех упомянутых типов волн является единообразным. Таким образом, выражения для импедансов с точностью до постоянных коэффициентов для всех типов волн также являются единообразными, причем отличие состоит только в выражениях импедансов через параметры составляющих структуру сред.

Как результат, общий ход расчета амплитуд выходящих из структуры волн также является единообразным.

При этом выражения для амплитуд через импедансы сред в случае нормального падения акустической волны в жидкости, а также нормального падения электромагнитной волны в изотропной среде, полностью совпадают с выражениями, получаемыми для одномерной волны.

## 5.2. Учет преломления волн на границах между средами

В случае наклонного падения волны в жидкости, а также наклонного падения электромагнитных волн продольной и поперечной поляризаций, необходимо учитывать преломление волн на границах между составляющими структуру средами.

Такой учет производится с помощью последовательного применения закона Снеллиуса [3, стр. 63, форм. (8)], [5, стр. 472–473, форм. (135.6)], связывающего углы распространения и волновые числа волн в последующей среде с такими же параметрами в предыдущей среде соотношением вида

$$k_{n+1} \sin \theta_{n+1} = k_n \sin \theta_n, \quad (5.1)$$

откуда получаем

$$\sin \theta_{n+1} = \frac{k_n}{k_{n+1}} \sin \theta_n, \quad (5.2)$$

а также

$$\cos \theta_{n+1} = \frac{\sqrt{k_{n+1}^2 - k_n^2 \sin^2 \theta_n}}{k_{n+1}}. \quad (5.3)$$

Используя понятие нулевого импеданса в соответствии с (2.10), можно записать закон Снеллиуса в виде:

$$\frac{\sin \theta_{n+1}}{Z_{(n+1)0}} = \frac{\sin \theta_n}{Z_{n0}}, \quad (5.4)$$

откуда получаем

$$\sin \theta_{n+1} = \frac{Z_{(n+1)0}}{Z_{n0}} \sin \theta_n, \quad (5.5)$$

а также

$$\cos \theta_{n+1} = \frac{\sqrt{Z_{n0}^2 - Z_{(n+1)0}^2 \sin^2 \theta_n}}{Z_{n0}}. \quad (5.6)$$

Таким образом, в случае наклонного падения любого типа рассматриваемых волн, первым этапом решения задачи должен быть расчет углов распространения волн во всех отдельных средах структуры. Такой расчет начинается с угла, соответствующего среде, из которой происходит начальное падение волны, то есть при падении волны прямого направления со среды 1, а при падении волны встречного



направления — со среды  $N$ , и проводится последовательно по всем средам при прямом падении до среды  $N$ , а при встречном — до среды  $1$ .

Дальнейший расчет нахождения амплитуд волн, отраженных по отношению к падающей, производится путем пересчета входного импеданса с последующей среды на предыдущую относительно направления падения волны, а для волн, проходящих по отношению к падающей — путем такого же пересчета системы уравнений. Подробный ход обоих пересчетов приведен в главе 4, поэтому здесь рассмотрим лишь формулы пересчета для различных типов волн и видов их падения.

### 5.3. Одномерная волна

Для сохранения общности изложения начнем рассмотрение с наиболее простого случая одномерной волны, в основном рассмотренного в разделе 4.9. Здесь повторим только основные положения. Геометрия задачи показана на рис. 5.1.

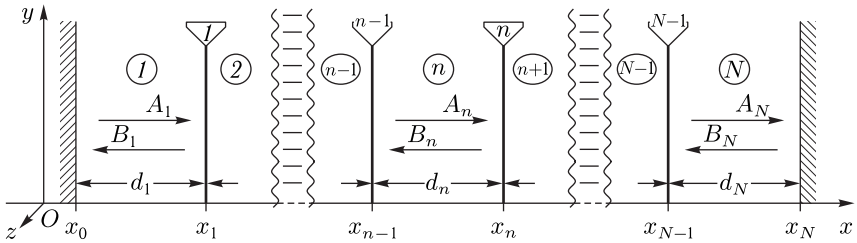


Рис. 5.1. Геометрия распространения одномерной волны

Структура содержит  $N$  сред, разделенных  $N - 1$  границами. Координаты границ равны  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ , расстояния между ними:

$$d_n = x_n - x_{n-1}. \quad (5.7)$$

Решение волнового уравнения в среде с номером  $n$ , нормированное относительно точки исхода волны, имеет вид:

$$U_n = A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_n)}. \quad (5.8)$$

Импеданс той же среды равен:

$$Z_n = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_n)}}{A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} - B_n e^{ik_n(x-x_n)}}, \quad (5.9)$$

где нулевой импеданс равен

$$Z_{n0} = \frac{1}{k_n}. \quad (5.10)$$

Граничные условия на границах с номерами от 1 до  $N - 1$  имеют вид:

$$U_1|_{x=x_1} = U_2|_{x=x_1}; \quad (5.11)$$

$$Z_1|_{x=x_1} = Z_2|_{x=x_1}; \quad (5.12)$$

.....

$$U_{n-1}|_{x=x_{n-1}} = U_n|_{x=x_{n-1}}; \quad (5.13)$$

$$Z_{n-1}|_{x=x_{n-1}} = Z_n|_{x=x_{n-1}}; \quad (5.14)$$

$$U_n|_{x=x_n} = U_{n+1}|_{x=x_n}; \quad (5.15)$$

$$Z_n|_{x=x_n} = Z_{n+1}|_{x=x_n}; \quad (5.16)$$

.....

$$U_{N-1}|_{x=x_{N-1}} = U_N|_{x=x_{N-1}}; \quad (5.17)$$

$$Z_{N-1}|_{x=x_{N-1}} = Z_N|_{x=x_{N-1}}. \quad (5.18)$$

Отдельно рассмотрим случаи падения волн прямого и встречного направлений.

### 5.3.1. Падение прямой волны

В случае падения прямой волны задана и отлична от нуля амплитуда  $A_1$ , а амплитуда  $B_N$  полагается равной нулю.

#### **Выходящая встречная волна**

Сначала рассмотрим выходящую волну встречного направления, являющуюся отраженной волной по отношению к падающей.

Входной импеданс среды  $N$  на границе  $N - 1$  при  $x = x_{N-1}$  равен:

$$Z_N^{(inA)} = Z_N|_{x=x_{N-1}} = Z_{N0}. \quad (5.19)$$

В соответствии с (4.277) формула пересчета импедансов имеет вид:

$$Z_n^{(inA)} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(inA)})e_n^{-1} - (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(inA)})e_n}{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(inA)})e_n^{-1} + (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(inA)})e_n}. \quad (5.20)$$

Выполняя пересчет до среды  $1$ , находим  $Z_2^{(inA)}$ , откуда получаем амплитуду отраженной волны  $B_1$ :

$$B_1 = -\frac{Z_{10} + Z_2^{(inA)}}{Z_{10} - Z_2^{(inA)}} A_1 e_1. \quad (5.21)$$

Это выражение можно записать в виде:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0} A_1 e_1, \quad (5.22)$$

где  $D_{B1}$  и  $D_0$  определяются нулевыми импедансами промежуточных сред в сочетании с экспонентами, мнимые показатели которых представляют собой произведения волновых чисел сред на толщины тех же сред.

Чтобы получить амплитуду  $B_1$ , выраженную через волновые числа, в полученном выражении (5.22) надо заменить нулевые импедансы волновыми числами в соответствии с формулой (5.10).

### **Выходящая прямая волна**

Теперь рассмотрим выходящую волну прямого направления, являющуюся проходящей волной по отношению к падающей.

Так как  $B_N = 0$ , то в среде  $N$  имеется только одна волна прямого направления с амплитудой  $A_N$ , которую и требуется найти.

Из граничного условия для амплитуд на границе  $N - 1$  при  $B_N = 0$  получаем связи этой амплитуды с амплитудами волн обоих направлений в среде  $N - 1$ :

$$A_{N-1} = \frac{Z_{(N-1)0} + Z_{N0}}{2Z_{N0}} A_N e_{N-1}^{-1}; \quad (5.23)$$

$$B_{N-1} = -\frac{Z_{(N-1)0} - Z_{N0}}{2Z_{N0}} A_N. \quad (5.24)$$

Из граничных условий на границе  $n$  находим формулы пересчета амплитуд  $A_{n+1}$  и  $B_{n+1}$  в амплитуды  $A_n$  и  $B_n$ :

$$A_n = \frac{A_{n+1}(Z_{n0} + Z_{(n+1)0}) - B_{n+1}(Z_{n0} - Z_{(n+1)0})e_{n+1}}{2Z_{(n+1)0}} e_n^{-1}; \quad (5.25)$$

$$B_n = \frac{-A_{n+1}(Z_{n0} - Z_{(n+1)0}) + B_{n+1}(Z_{n0} + Z_{(n+1)0})e_{n+1}}{2Z_{(n+1)0}}. \quad (5.26)$$

В процессе пересчета амплитуд эти формулы играют ту же роль, что и формула для пересчета импедансов (5.20). Последовательное их применение с учетом (5.23)–(5.24) позволяет получить выражение, связывающее заданную амплитуду  $A_1$  с искомой амплитудой  $A_N$ :

$$A_1 = A_1(A_N), \quad (5.27)$$

разрешение которого относительно  $A_N$  приводит к выражению вида

$$A_N = \frac{D_{AN}}{D_0} A_1 e_1, \quad (5.28)$$

где  $D_{AN}$  и  $D_0$  содержат только нулевые импедансы всех сред, а конкретный вид этих выражений определяется упомянутыми последовательными подстановками.

### **5.3.2. Падение встречной волны**

В случае падения встречной волны задана и отлична от нуля амплитуда  $B_N$ , а амплитуда  $A_1$  полагается равной нулю.

### **Выходящая прямая волна**

Сначала рассмотрим выходящую волну прямого направления, являющуюся отраженной волной по отношению к падающей.

В этом случае встречный входной импеданс в среде  $l$  при  $x = x_1$  имеет вид:

$$Z_1^{(inB)} = Z_1|_{x=x_1} = -Z_{10}. \quad (5.29)$$

Формула для пересчета импеданса, получаемая в соответствии с (4.284), имеет вид:

$$Z_n^{(inB)} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n-1}^{(inB)})e_n - (Z_{n0} - Z_{n-1}^{(inB)})e_n^{-1}}{(Z_{n0} + Z_{n-1}^{(inB)})e_n + (Z_{n0} - Z_{n-1}^{(inB)})e_n^{-1}}. \quad (5.30)$$

С ее помощью выражаем встречный входной импеданс в среде  $N - 1$  через  $Z_{10}$ :

$$Z_{N-1}^{(inB)} = Z_{N-1}^{(inB)}(Z_{10}). \quad (5.31)$$

Используя граничное условие для импедансов на границе  $N - 1$ , получаем:

$$A_N = -\frac{Z_{N0} + Z_{N-1}^{(inB)}(Z_{10})}{Z_{N0} - Z_{N-1}^{(inB)}(Z_{10})} B_N e_N. \quad (5.32)$$

Таким образом, получено выражение амплитуды волны прямого направления  $A_N$  при падении встречной волны с амплитудой  $B_N$ .

Подстановка последовательно пересчитанных импедансов приводит к выражению вида:

$$A_N = \frac{D_{A1}}{D_0} B_N e_N, \quad (5.33)$$

которое и является решением поставленной задачи.

### **Выходящая встречная волна**

Теперь рассмотрим выходящую волну встречного направления с амплитудой  $B_1$ , являющуюся проходящей волной по отношению к падающей.

Из граничных условий на границе  $l$  получаем:

$$A_2 = \frac{Z_{10} - Z_{20}}{2Z_{10}} B_1; \quad (5.34)$$

$$B_2 = \frac{Z_{10} + Z_{20}}{2Z_{10}} B_1 e_2^{-1}. \quad (5.35)$$

Формулы для пересчета амплитуд на границе с номером  $n$  имеют вид:

$$A_{n+1} = \frac{A_n(Z_{n0} + Z_{(n+1)0})e_n + B_n(Z_{n0} - Z_{(n+1)0})}{2Z_{n0}}, \quad (5.36)$$

$$B_{n+1} = \frac{A_n(Z_{n0} - Z_{(n+1)0})e_n + B_n(Z_{n0} + Z_{(n+1)0})}{2Z_{n0}} e_{n+1}^{-1}. \quad (5.37)$$

Выполняя последовательный пересчет, получаем выражение вида:

$$B_N = B_N(B_1), \quad (5.38)$$

разрешая которое относительно  $B_1$  получаем:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0} B_N e_N, \quad (5.39)$$

что и дает решение поставленной задачи.

#### 5.4. Акустическая волна в жидкости. Нормальное падение

В случае нормального падения акустической волны в жидкости геометрия задачи совпадает с геометрией для одномерной волны, приведенной на рис. 5.1. Решения волновых уравнений, обобщенные импедансы и граничные условия также совпадают, то есть этот случай полностью тождественен случаю одномерной волны, кроме выражений для нулевых импедансов, общий вид которых определяется формулой (2.99) (а также приведен в таблице 2.1), то есть для среды с номером  $n$  имеет вид:

$$Z_{n0} = a_n \rho_{0n}, \quad (5.40)$$

где  $a_n$  — фазовая скорость акустической волны в среде  $n$ , а  $\rho_{0n}$  — плотность жидкости в той же среде.

В остальном формулы пересчета импедансов (5.20) и (5.30), а также пересчета амплитуд (5.25), (5.26) и (5.36), (5.37) полностью сохраняются, поэтому здесь подробно на этом случае останавливаться не будем.

#### 5.5. Акустическая волна в жидкости. Наклонное падение

В случае наклонного падения акустической волны в жидкости необходимо учитывать неколлинеарность между направлением распространения волны и перпендикуляром к границам раздела сред. Геометрия задачи для этого случая показана на рис. 5.2.

Структура содержит  $N$  сред, разделенных  $N - 1$  границами. Координаты границ равны  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ , расстояния между ними

$$d_n = x_n - x_{n-1}. \quad (5.41)$$

Волновые векторы волн прямого направления обозначены индексами « $i$ », встречного — индексом « $r$ ».

На границах падающие волны испытывают преломление, то есть углы падения  $\theta_n$  преобразуются в углы преломления  $\theta_{n\pm 1}$  в соответствии с законом Снеллиуса.

Падающая волна прямого направления, исходя из точки А, распространяется в среде 1, падает на границу 1 в точке В под углом  $\theta_1^{(0)}$ , частично отражается под тем же углом  $\theta_1 = \theta_1^{(0)}$  к точке J и частично проходит в среду 2, преломляясь под углом  $\theta_1$ . Далее эта волна последовательно проходит точки А, В, ..., С, D, ..., Е и достигает конечной границы структуры в точке F.

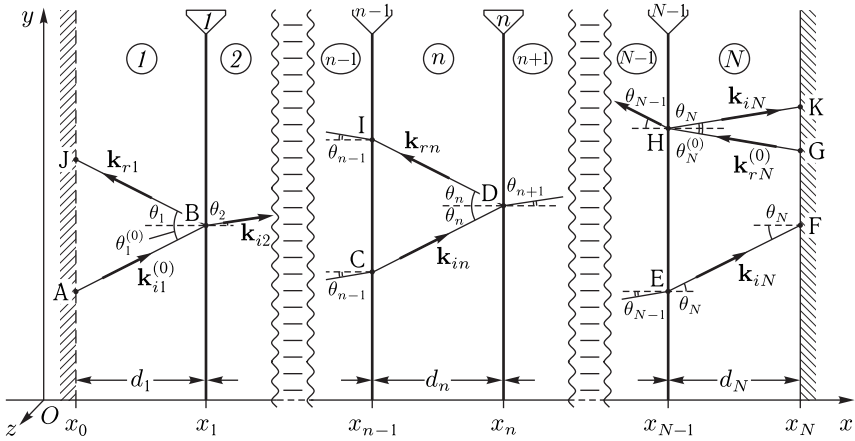


Рис. 5.2. Геометрия распространения акустической волны при наклонном падении

Волна, входящая в среду  $n$  на границе  $n - 1$  в точке  $C$ , проходит до границы  $n + 1$ , падая на нее в точке  $D$ , откуда частично проходит в среду  $n + 1$  и частично отражается в ту же среду  $n$ , стремясь к точке  $I$ .

Падающая волна встречного направления выходит из точки  $G$ , распространяется в среде  $N$  до точки  $H$ , в которой падает на границу  $N - 1$  под углом  $\theta_N^{(0)}$ , частично отражается в ту же среду  $N$  под углом  $\theta_N = \theta_N^{(0)}$ , распространяясь к точке  $K$ , и частично проходит в среду  $N - 1$ , преломляясь под углом  $\theta_{N-1}$ . Дальнейший ход этой волны аналогичен ходу волны прямого направления и на рисунке не показан.

Заметим, что описанные траектории прямой и встречной волн, входящих в структуру в точках  $A$  и  $G$ , являются как бы линейными «следами» именно этих точек, тогда как все распространяющиеся в структуре волны являются плоскими, то есть безграничными по своим фронтам, перпендикулярным соответствующим волновым векторам. Такое приближение справедливо только в тех случаях, когда все составляющие структуру среды являются полностью однородными по всем направлениям.

Итак, первым этапом решения задачи является определение углов распространения всех внутренних волн в структуре, исходя из заданных значений  $\theta_1^{(0)}$  и  $\theta_1^{(N)}$ . Такое определение производится путем последовательного применения закона Снеллиуса в соответствии с формулами (5.1)–(5.6).

Следующим этапом является решение волновых уравнений во всех средах, что делается полностью единообразно.

Так, компоненты волнового вектора в среде с номером  $n$  равны:

$$k_{nx} = k_n \cos \theta_n, \quad (5.42)$$

$$k_{ny} = k_n \sin \theta_n, \quad (5.43)$$

$$k_{nz} = 0. \quad (5.44)$$

Решение волнового уравнения для давления в той же среде аналогично (2.46), имеет вид:

$$P_n = A_n e^{-ik_n(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n)} + B_n e^{ik_n(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n)}. \quad (5.45)$$

Полагая зависимость амплитуд прямой и встречной волн от  $y$  отсутствующей и нормируя решение относительно точки исхода волны, получаем:

$$P_n = A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} + B_n e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}. \quad (5.46)$$

Обобщенный импеданс принимает вид:

$$Z_n = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} + B_n e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}}{A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} - B_n e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}}, \quad (5.47)$$

где

$$Z_{n0} = \frac{a_n \rho_{0n}}{\cos \theta_n}. \quad (5.48)$$

Граничные условия полностью совпадают с таковыми для нормально падения волн и имеют вид (5.11)–(5.18), поэтому здесь не приводятся.

Отдельно рассмотрим случаи падения волн прямого и встречного направлений.

Будем пользоваться заменами для разных типов импедансов, приведенными в таблице (таблица 2.1, раздел 2.6).

### 5.5.1. Падение прямой волны

В случае падения прямой волны задана и отлична от нуля амплитуда  $A_1$ , а амплитуда  $B_N$  полагается равной нулю.

#### **Выходящая встречная волна**

Сначала рассмотрим выходящую волну встречного направления, являющуюся отраженной волной по отношению к падающей.

Входной импеданс среды  $N$  на границе  $N - 1$  при  $x = x_{N-1}$  равен:

$$\frac{Z_N^{(inA)}}{\cos \theta_N} = \frac{Z_N}{\cos \theta_N} \Big|_{x=x_{N-1}} = \frac{Z_{N0}}{\cos \theta_N}, \quad (5.49)$$

откуда получаем

$$Z_N^{(inA)} = Z_N \Big|_{x=x_{N-1}} = Z_{N0}. \quad (5.50)$$

В соответствии с (4.273) с учетом замен, приведенных в таблице 2.1, формула пересчета импедансов имеет вид:

$$\frac{Z_n^{(inA)}}{\cos \theta_n} = \frac{Z_{n0}}{\cos \theta_n} \times \frac{\left( \frac{Z_{n0}}{\cos \theta_n} + \frac{Z_{n+1}^{(inA)}}{\cos \theta_{n+1}} \right) e^{-cn} - \left( \frac{Z_{n0}}{\cos \theta_n} - \frac{Z_{n+1}^{(inA)}}{\cos \theta_{n+1}} \right) e_{cn}}{\left( \frac{Z_{n0}}{\cos \theta_n} + \frac{Z_{n+1}^{(inA)}}{\cos \theta_{n+1}} \right) e^{-cn} + \left( \frac{Z_{n0}}{\cos \theta_n} - \frac{Z_{n+1}^{(inA)}}{\cos \theta_{n+1}} \right) e_{cn}}, \quad (5.51)$$

где экспоненты записаны в соответствии с обозначениями (4.262)–(4.264).

Выполняя сложение дробей в скобках, получаем:

$$Z_n^{(inA)} = Z_{n0} \times \frac{(Z_{n0} \cos \theta_{n+1} + Z_{n+1}^{(inA)} \cos \theta_n) e_{cn}^{-1} - (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} - Z_{n+1}^{(inA)} \cos \theta_n) e_{cn}}{(Z_{n0} \cos \theta_{n+1} + Z_{n+1}^{(inA)} \cos \theta_n) e_{cn}^{-1} + (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} - Z_{n+1}^{(inA)} \cos \theta_n) e_{cn}}. \quad (5.52)$$

Выполняя пересчет до среды 1, находим  $Z_2^{(inA)}$ , откуда получаем амплитуду отраженной волны  $B_1$ :

$$B_1 = -\frac{\frac{Z_{10}}{\cos \theta_1} + \frac{Z_2^{(inA)}}{\cos \theta_2}}{\frac{Z_{10}}{\cos \theta_1} - \frac{Z_2^{(inA)}}{\cos \theta_2}} A_1 e_{c1} = -\frac{Z_{10} \cos \theta_2 + Z_2^{(inA)} \cos \theta_1}{Z_{10} \cos \theta_2 - Z_2^{(inA)} \cos \theta_1} A_1 e_{c1}. \quad (5.53)$$

Это выражение можно записать в виде:

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0} A_1 e_{c1}, \quad (5.54)$$

где  $D_{B1}$  и  $D_0$  определяются нулевыми импедансами промежуточных сред в сочетании с экспонентами, мнимые показатели которых представляют собой произведения волновых чисел сред на толщины тех же сред.

В случае необходимости получить амплитуду  $B_1$ , выраженную через волновые числа, в полученном выражении (5.53) надо заменить нулевые импедансы волновыми числами в соответствии с формулой (2.10).

### Выходящая прямая волна

Теперь рассмотрим выходящую волну прямого направления, являющуюся проходящей волной по отношению к падающей.

Так как  $B_N = 0$ , то в среде  $N$  имеется только одна волна прямого направления с амплитудой  $A_N$ , которую и требуется найти.

Из граничного условия для амплитуд на границе  $N - 1$  при  $B_N = 0$  с учетом замен, приведенных в таблице 2.1 и обозначений (2.101), получаем связи этой амплитуды с амплитудами волн обоих направлений в среде  $N - 1$ :

$$A_{N-1} = \frac{Z_{(N-1)0} \cos \theta_N + Z_{N0} \cos \theta_{N-1}}{2Z_{N0} \cos \theta_{N-1}} A_N e_{c(N-1)}^{-1}; \quad (5.55)$$

$$B_{N-1} = -\frac{Z_{(N-1)0} \cos \theta_N - Z_{N0} \cos \theta_{N-1}}{2Z_{N0} \cos \theta_{N-1}} A_N. \quad (5.56)$$

Из граничных условий на границе  $n$  находим формулы пересчета амплитуд  $A_{n+1}$  и  $B_{n+1}$  в амплитуды  $A_n$  и  $B_n$ :

$$A_n = \frac{e_{cn}^{-1}}{2Z_{(n+1)0} \cos \theta_n} \{A_{n+1}(Z_{n0} \cos \theta_{n+1} + Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) - B_{n+1}(Z_{n0} \cos \theta_{n+1} - Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) e_{c(n+1)}\}. \quad (5.57)$$



$$B_n = \frac{e_{cn}^{-1}}{2Z_{(n+1)0} \cos \theta_n} \left\{ -A_{n+1}(Z_{n0} \cos \theta_{n+1} - Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) + \right. \\ \left. + B_{n+1}(Z_{n0} \cos \theta_{n+1} + Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) e_{c(n+1)} \right\}. \quad (5.58)$$

В процессе пересчета амплитуд эти формулы играют ту же роль, что и формула для пересчета импедансов (5.52). Последовательное их применение с учетом (5.55)–(5.56) позволяет получить выражение, связывающее заданную амплитуду  $A_1$  с искомой амплитудой  $A_N$ :

$$A_1 = A_1(A_N), \quad (5.59)$$

разрешение которого относительно  $A_N$  приводит к выражению вида:

$$A_N = \frac{D_{AN}}{D_0} A_1 e_{c1}, \quad (5.60)$$

где  $D_{AN}$  и  $D_0$  содержат только нулевые импедансы всех сред, а конкретный вид этих выражений определяется упомянутыми последовательными подстановками.

### 5.5.2. Падение встречной волны

В случае падения встречной волны задана и отлична от нуля амплитуда  $B_N$ , а амплитуда  $A_1$  полагается равной нулю. Получение формул для пересчета импеданса и амплитуд с помощью замен аналогично случаю падения прямой волны, поэтому будем приводить только конечные результаты.

#### **Выходящая прямая волна**

Сначала рассмотрим выходящую волну прямого направления, являющуюся отраженной волной по отношению к падающей.

В этом случае встречный входной импеданс в среде 1 при  $x = x_1$  имеет вид:

$$Z_1^{(inB)} = Z_1|_{x=x_1} = -Z_{10}. \quad (5.61)$$

Формула для пересчета импеданса, получаемая в соответствии с (4.284), имеет вид:

$$Z_n^{(inB)} = Z_{n0} \times \\ \times \frac{(Z_{n0} \cos \theta_{n-1} + Z_{n-1}^{(inB)} \cos \theta_n) e_{cn} - (Z_{n0} \cos \theta_{n-1} - Z_{n-1}^{(inB)} \cos \theta_n) e_{cn}^{-1}}{(Z_{n0} \cos \theta_{n-1} + Z_{n-1}^{(inB)} \cos \theta_n) e_{cn} + (Z_{n0} \cos \theta_{n-1} - Z_{n-1}^{(inB)} \cos \theta_n) e_{cn}^{-1}}. \quad (5.62)$$

С ее помощью выражаем встречный входной импеданс в среде  $N - 1$  через  $Z_{10}$ :

$$Z_{N-1}^{(inB)} = Z_{N-1}^{(inB)}(Z_{10}). \quad (5.63)$$

Используя граничное условие для импедансов на границе  $N - 1$ , получаем:

$$A_N = - \frac{Z_{N0} \cos \theta_{N-1} + Z_{N-1}^{(inB)}(Z_{10}) \cos \theta_N}{Z_{N0} \cos \theta_{N-1} - Z_{N-1}^{(inB)}(Z_{10}) \cos \theta_N} B_N e_{cN}. \quad (5.64)$$

Таким образом, получено выражение амплитуды волны прямого направления  $A_N$  при падении встречной волны с амплитудой  $B_N$ .

Подстановка последовательно пересчитанных импедансов приводит к выражению вида:

$$A_N = \frac{D_{A1}}{D_0} B_N e_{cN}, \quad (5.65)$$

которое и является решением поставленной задачи.

### **Выходящая встречная волна**

Теперь рассмотрим выходящую волну встречного направления с амплитудой  $B_1$ , являющуюся проходящей волной по отношению к падающей.

Из граничных условий на границе  $1$  получаем:

$$A_2 = \frac{Z_{10} \cos \theta_2 - Z_{20} \cos \theta_1}{2Z_{10} \cos \theta_2} B_1; \quad (5.66)$$

$$B_2 = \frac{Z_{10} \cos \theta_2 + Z_{20} \cos \theta_1}{2Z_{10} \cos \theta_2} B_1 e_{c2}^{-1}. \quad (5.67)$$

Формулы для пересчета амплитуд на границе с номером  $n$ , имеют вид:

$$A_{n+1} = \frac{1}{2Z_{n0} \cos \theta_{n+1}} \{ A_n (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} + Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) e_{cn} + B_n (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} - Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) \}. \quad (5.68)$$

$$B_{n+1} = \frac{e_{c(n+1)}^{-1}}{2Z_{n0} \cos \theta_{n+1}} \{ A_n (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} - Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) e_{cn} + B_n (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} + Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) \}. \quad (5.69)$$

Выполняя последовательный пересчет, получаем выражение вида:

$$B_N = B_N(B_1), \quad (5.70)$$

разрешая которое относительно  $B_1$ , получаем

$$B_1 = \frac{D_{B1}}{D_0} B_N e_{cN}, \quad (5.71)$$

что и дает решение поставленной задачи.

## 5.6. Электромагнитная волна. Нормальное падение

Для случая нормального падения электромагнитной волны геометрия задачи приведена на рис. 5.3.

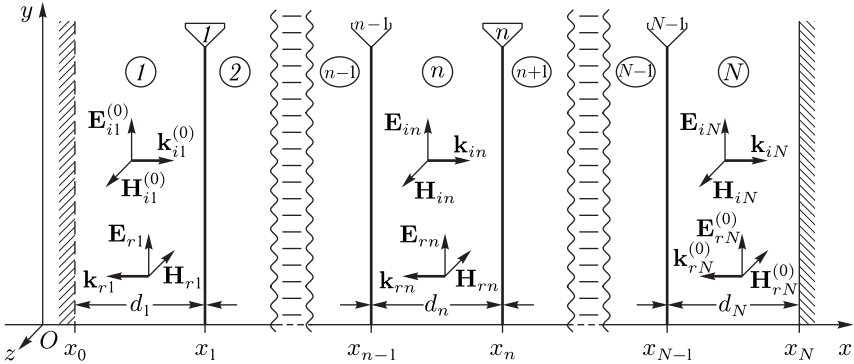


Рис. 5.3. Геометрия задачи для электромагнитной волны при нормальном падении

Поскольку волновой вектор падающей волны перпендикулярен плоскостям границ между составляющими структуру средами, а сами среды являются однородными, распространение волн во всех средах происходит вдоль единой оси, причем поляризация волны в процессе распространения не меняется.

В силу поперечности электромагнитной волны, векторы ее электрического и магнитного полей, будучи взаимно перпендикулярными, в процессе всего распространения остаются перпендикулярными также направлению распространения волны.

Такая геометрия позволяет выбрать систему координат таким образом, чтобы ось  $Ox$  была ориентирована вдоль направления распространения волны, ось  $Oy$  — вдоль направления электрического поля, а ось  $Oz$  — вдоль магнитного.

При этом будем полагать, что при отражении любой волны от границы раздела сред направление вектора ее электрического поля сохраняется, а направление вектора магнитного поля меняется на противоположное.

Структура в целом содержит  $N$  сред, разделенных  $N - 1$  границами. Координаты границ равны  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ , расстояния между ними:  $d_n = x_n - x_{n-1}$ . Волновые векторы и поля волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , обозначены индексами « $i$ », в отрицательном — индексами « $r$ ». Падающие волны обозначены верхним индексом « $(0)$ ». Таким образом, на структуру со стороны среды 1 падает волна прямого направления с волновым вектором  $\mathbf{k}_{i1}^{(0)}$

и полями  $\mathbf{E}_{i1}^{(0)}$  и  $\mathbf{H}_{i1}^{(0)}$ , со стороны среды  $N$  падает волна встречного направления с волновым вектором  $\mathbf{k}_{rN}^{(0)}$  и полями  $\mathbf{E}_{rN}^{(0)}$  и  $\mathbf{H}_{rN}^{(0)}$ .

Поскольку электрическое и магнитное поля волны однозначно связаны, достаточно ограничиться рассмотрением только  $y$ -компоненты электрического поля, для которой координатная часть волнового уравнения в среде с номером  $n$  имеет вид подобный (2.54) (индекс « $y$ » опускаем):

$$\frac{\partial^2 E_n}{\partial x^2} + k_n^2 E_n = 0, \quad (5.72)$$

где

$$k_n = \omega \sqrt{\varepsilon_n \varepsilon_0 \mu_n \mu_0}. \quad (5.73)$$

Решение этого уравнения, нормированное относительно точки исхода волны, имеет вид суперпозиции волн прямого и обратного направлений:

$$E_n = E_{in} e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + E_{rn} e^{ik_n(x-x_n)}, \quad (5.74)$$

где  $E_{in}$  и  $E_{rn}$  — произвольные постоянные.

Обобщенный импеданс имеет вид:

$$Z_n = Z_{n0} \frac{E_{in} e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + E_{rn} e^{ik_n(x-x_n)}}{E_{in} e^{-ik_n(x-x_{n-1})} - E_{rn} e^{ik_n(x-x_n)}}, \quad (5.75)$$

где нулевой импеданс

$$Z_{n0} = \sqrt{\frac{\mu_n \mu_0}{\varepsilon_n \varepsilon_0}}. \quad (5.76)$$

Граничные условия на границе с номером  $n$  имеют вид:

$$U_n|_{x=x_n} = U_{n+1}|_{x=x_n}; \quad (5.77)$$

$$Z_n|_{x=x_n} = Z_{n+1}|_{x=x_n}. \quad (5.78)$$

В таком виде задача с точностью до обозначений аналогична задаче для одномерной волны, разобранный в разделе 5.3, поэтому приведем лишь конечные выражения, произведя соответствующую замену обозначений.

### 5.6.1. Падение прямой волны

#### **Выходящая встречная волна**

Входной импеданс среды  $N$  на границе  $N - 1$ :

$$Z_N^{(inA)} = Z_{N0}. \quad (5.79)$$

Формула для пересчета импедансов:

$$Z_n^{(inA)} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(inA)})e_n^{-1} - (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(inA)})e_n}{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(inA)})e_n^{-1} + (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(inA)})e_n}. \quad (5.80)$$

Амплитуда отраженной волны  $E_{r1}$ :

$$E_{r1} = \frac{D_{Er1}}{D_0} E_{i1}^{(0)} e_1. \quad (5.81)$$

**Выходящая прямая волна**

Амплитуды из граничных условий на границе  $N - 1$ :

$$E_{i(N-1)} = \frac{Z_{(N-1)0} + Z_{N0}}{2Z_{N0}} E_{iN} e_{N-1}^{-1}; \quad (5.82)$$

$$E_{r(N-1)} = -\frac{Z_{(N-1)0} - Z_{N0}}{2Z_{N0}} E_{iN}. \quad (5.83)$$

Формулы для пересчета амплитуд:

$$E_{in} = \frac{E_{i(n+1)}(Z_{n0} + Z_{(n+1)0}) - E_{r(n+1)}(Z_{n0} - Z_{(n+1)0})e_{n+1}}{2Z_{(n+1)0}} e_n^{-1}, \quad (5.84)$$

$$E_{rn} = \frac{-E_{i(n+1)}(Z_{n0} - Z_{(n+1)0}) + E_{r(n+1)}(Z_{n0} + Z_{(n+1)0})e_{n+1}}{2Z_{(n+1)0}}. \quad (5.85)$$

Амплитуда проходящей волны  $E_{iN}$ :

$$E_{iN} = \frac{D_{EiN}}{D_0} E_{i1}^{(0)} e_1. \quad (5.86)$$

**5.6.2. Падение встречной волны****Выходящая прямая волна**

Встречный входной импеданс в среде 1:

$$Z_1^{(inB)} = -Z_{10}. \quad (5.87)$$

Формула для пересчета импедансов:

$$Z_n^{(inB)} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n-1}^{(inB)})e_n - (Z_{n0} - Z_{n-1}^{(inB)})e_n^{-1}}{(Z_{n0} + Z_{n-1}^{(inB)})e_n + (Z_{n0} - Z_{n-1}^{(inB)})e_n^{-1}}. \quad (5.88)$$

Амплитуда выходящей волны:

$$E_{iN} = \frac{D_{EiN}}{D_0} E_{rN}^{(0)} e_N. \quad (5.89)$$

**Выходящая встречная волна**

Амплитуды из граничных условий на границе 1:

$$E_{i2} = \frac{Z_{10} - Z_{20}}{2Z_{10}} E_{r1}; \quad (5.90)$$

$$E_{r2} = \frac{Z_{10} + Z_{20}}{2Z_{10}} E_{r1} e_2^{-1}. \quad (5.91)$$

Формулы для пересчета амплитуд:

$$E_{i(n+1)} = \frac{E_{in}(Z_{n0} + Z_{(n+1)0})e_n + E_{rn}(Z_{n0} - Z_{(n+1)0})}{2Z_{n0}}; \quad (5.92)$$

$$E_{r(n+1)} = \frac{E_{in}(Z_{n0} - Z_{(n+1)0})e_n + E_{rn}(Z_{n0} + Z_{(n+1)0})}{2Z_{n0}} e_{n+1}^{-1}. \quad (5.93)$$

Амплитуда выходящей волны:

$$E_{r1} = \frac{D_{Er1}}{D_0} E_{rN}^{(0)} e_N. \quad (5.94)$$

### 5.7. Электромагнитная волна. Наклонное падение. Продольная поляризация

Для случая наклонного падения электромагнитной волны при продольной поляризации геометрия задачи приведена на рис. 5.4.

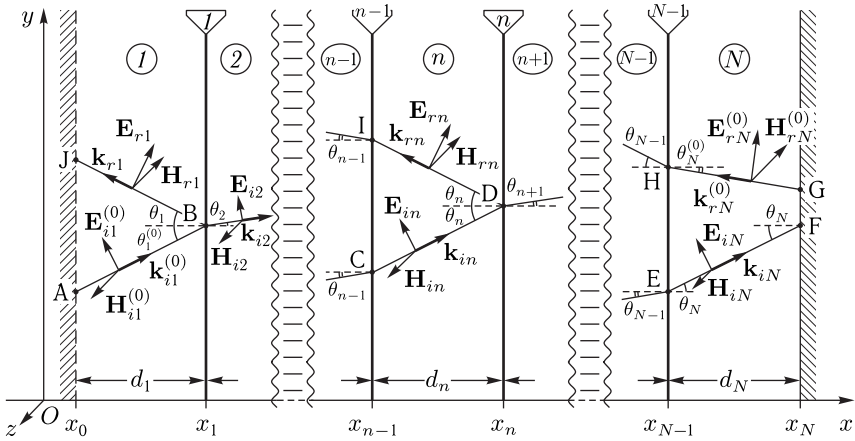


Рис. 5.4. Геометрия задачи для наклонного падения электромагнитной волны при продольной поляризации

Структура содержит  $N$  сред, разделенных  $N - 1$  границами. Координаты границ равны  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ , расстояния между ними:  $d_n = x_n - x_{n-1}$ . Обозначения волновых векторов и полей распространяющихся волн совпадают с обозначениями для случая нормального падения.

Падающие волны имеют продольную поляризацию, что означает, что векторы электрического поля этих волн ориентированы в плоскости падения, проходящей через направление падения волны и нормаль к границам структуры.

Как и в случае нормального падения полагаем, что поляризация волн в процессе распространения не меняется, то есть векторы электрических полей всех волн остаются в плоскости падения. При этом векторы магнитного поля всех волн всегда остаются перпендикулярными этой плоскости.

Система координат выбрана таким образом, что ось  $Ox$  ориентирована перпендикулярно плоскостям границ раздела сред, ось  $Oy$  параллельна линиям пересечения плоскости падения с плоскостями

границ, а ось  $Oz$  перпендикулярна к плоскости падения. Таким образом, плоскость  $Oxy$  совпадает с плоскостью падения волн.

Полагаем, что при отражении любой волны от границы раздела сред направление  $y$ -компоненты вектора ее электрического поля сохраняется, а направление вектора магнитного поля, имеющего компоненту только вдоль оси  $Oz$ , меняется на противоположное.

Как и в случае наклонного падения акустической волны в жидкости, здесь необходимо учитывать неколлинеарность между направлением распространения волны и перпендикуляром к границам раздела сред. На границах падающие волны испытывают преломление, то есть углы падения  $\theta_n$  преобразуются в углы преломления  $\theta_{n\pm 1}$  в соответствии с законом Снеллиуса.

Последовательное распространение падающих волн аналогично распространению волн в случае наклонного падения акустической волны в жидкости.

Падающая волна прямого направления, исходя из точки А, распространяется в среде 1, падает на границу 1 в точке В под углом  $\theta_1^{(0)}$ , частично отражается под тем же углом  $\theta_1 = \theta_1^{(0)}$  к точке J и частично проходит в среду 2, преломляясь под углом  $\theta_1$ . Далее эта волна последовательно проходит точки А, В, ..., С, D, ..., Е и достигает конечной границы структуры в точке F.

Волна, входящая в среду  $n$  на границе  $n - 1$  в точке С, проходит до границы  $n + 1$ , падая на нее в точке D, откуда частично проходит в среду  $n + 1$  и частично отражается в ту же среду  $n$ , стремясь к точке I.

Падающая волна встречного направления выходит из точки G, распространяется в среде  $N$  до точки H, в которой падает на границу  $N - 1$  под углом  $\theta_N^{(0)}$ , частично отражается в ту же среду  $N$  под углом  $\theta_N = \theta_N^{(0)}$ , распространяясь к точке K, и частично проходит в среду  $N - 1$ , преломляясь под углом  $\theta_{N-1}$ . Дальнейший ход этой волны аналогичен ходу волны прямого направления и на рисунке не показан.

Итак, первым этапом решения задачи является определение углов распространения всех внутренних волн в структуре, исходя из заданных значений  $\theta_1^{(0)}$  и  $\theta_1^{(N)}$ . Такое определение производится путем последовательного применения закона Снеллиуса в соответствии с формулами (5.1)–(5.6).

Поскольку электрическое и магнитное поля волны при известном значении угла  $\theta_n$  однозначно связаны, достаточно ограничиться рассмотрением только  $y$ -компоненты электрического поля, для которой координатная часть волнового уравнения в среде с номером  $n$  имеет вид подобный (2.66) с учетом (2.63)–(2.65) (индекс « $y$ » опускаем):

$$\frac{\partial^2 E_n}{\partial x^2} + (k_n \cos \theta_n)^2 E_n = 0, \quad (5.95)$$

где

$$k_n = \omega \sqrt{\varepsilon_n \varepsilon_0 \mu_n \mu_0}. \quad (5.96)$$

Решение этого уравнения, нормированное относительно точки исхода волны, имеет вид суперпозиции волн прямого и встречного направлений:

$$E_n = E_{ni} e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} + E_{nr} e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}, \quad (5.97)$$

где  $E_{ni}$  и  $E_{nr}$  — произвольные постоянные.

Обобщенный импеданс имеет вид:

$$Z_n = Z_{n0} \frac{E_{ni} e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} + E_{nr} e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}}{E_{ni} e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} - E_{nr} e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}}, \quad (5.98)$$

где нулевой импеданс равен

$$Z_{n0} = \frac{1}{\cos \theta_n} \sqrt{\frac{\mu_n \mu_0}{\varepsilon_n \varepsilon_0}}. \quad (5.99)$$

Граничные условия на границе с номером  $n$  имеют вид:

$$E_n|_{x=x_n} = E_{n+1}|_{x=x_n}; \quad (5.100)$$

$$Z_n|_{x=x_n} = Z_{n+1}|_{x=x_n}. \quad (5.101)$$

В таком виде задача с точностью до обозначений аналогична задаче для наклонного падения акустической волны в жидкости, разобранный в разделе 5.5, поэтому приведем лишь конечные выражения, произведя соответствующую замену обозначений.

### 5.7.1. Падение прямой волны

#### **Выходящая встречная волна**

Входной импеданс среды  $N$  на границе  $N - 1$ :

$$Z_N^{(inA)} = Z_{N0}. \quad (5.102)$$

Формула для пересчета импедансов:

$$Z_n^{(inA)} = Z_{n0} \times \frac{(Z_{n0} \cos \theta_{n+1} + Z_{n+1}^{(inA)} \cos \theta_n) e_{cn}^{-1} - (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} - Z_{n+1}^{(inA)} \cos \theta_n) e_{cn}}{(Z_{n0} \cos \theta_{n+1} + Z_{n+1}^{(inA)} \cos \theta_n) e_{cn}^{-1} + (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} - Z_{n+1}^{(inA)} \cos \theta_n) e_{cn}}. \quad (5.103)$$

Амплитуда отраженной волны  $E_{r1}$ :

$$E_{r1} = \frac{D_{Er1}}{D_0} E_{i1}^{(0)} e_{c1}. \quad (5.104)$$

#### **Выходящая прямая волна**

Амплитуды из граничных условий на границе  $N - 1$ :

$$E_{i(N-1)} = \frac{Z_{(N-1)0} \cos \theta_N + Z_{N0} \cos \theta_{N-1}}{2Z_{N0} \cos \theta_{N-1}} E_{iN} e_{c(N-1)}^{-1}; \quad (5.105)$$

$$E_{r(N-1)} = -\frac{Z_{(N-1)0} \cos \theta_N - Z_{N0} \cos \theta_{N-1}}{2Z_{N0} \cos \theta_{N-1}} E_{iN}. \quad (5.106)$$



Формулы для пересчета амплитуд:

$$E_{in} = \frac{e_{cn}^{-1}}{2Z_{(n+1)0} \cos \theta_n} \{ E_{i(n+1)} (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} + Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) - E_{r(n+1)} (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} - Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) e_{c(n+1)} \}. \quad (5.107)$$

$$E_{rn} = \frac{e_{cn}^{-1}}{2Z_{(n+1)0} \cos \theta_n} \{ -E_{i(n+1)} (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} - Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) + E_{r(n+1)} (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} + Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) e_{c(n+1)} \}. \quad (5.108)$$

Амплитуда проходящей волны  $E_{iN}$ :

$$E_{iN} = \frac{D_{EiN}}{D_0} E_{i1}^{(0)} e_{c1}. \quad (5.109)$$

### 5.7.2. Падение встречной волны

#### **Выходящая прямая волна**

Встречный входной импеданс в среде  $I$ :

$$Z_1^{(inB)} = -Z_{10}. \quad (5.110)$$

Формула для пересчета импедансов:

$$Z_n^{(inB)} = Z_{n0} \times \frac{(Z_{n0} \cos \theta_{n-1} + Z_{n-1}^{(inB)} \cos \theta_n) e_{cn} - (Z_{n0} \cos \theta_{n-1} - Z_{n-1}^{(inB)} \cos \theta_n) e_{cn}^{-1}}{(Z_{n0} \cos \theta_{n-1} + Z_{n-1}^{(inB)} \cos \theta_n) e_{cn} + (Z_{n0} \cos \theta_{n-1} - Z_{n-1}^{(inB)} \cos \theta_n) e_{cn}^{-1}}. \quad (5.111)$$

Амплитуда выходящей волны:

$$E_{iN} = \frac{D_{EiN}}{D_0} E_{rN}^{(0)} e_{cN}. \quad (5.112)$$

#### **Выходящая встречная волна**

Амплитуды из граничных условий на границе  $I$ :

$$E_{i2} = \frac{Z_{10} \cos \theta_2 - Z_{20} \cos \theta_1}{2Z_{10} \cos \theta_2} E_{r1}; \quad (5.113)$$

$$E_{r2} = \frac{Z_{10} \cos \theta_2 + Z_{20} \cos \theta_1}{2Z_{10} \cos \theta_2} E_{r1} e_{c2}^{-1}. \quad (5.114)$$

Формулы для пересчета амплитуд:

$$E_{i(n+1)} = \frac{1}{2Z_{n0} \cos \theta_{n+1}} \{ E_{in} (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} + Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) e_{cn} + E_{rn} (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} - Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) \}. \quad (5.115)$$

$$E_{r(n+1)} = \frac{e_{c(n+1)}^{-1}}{2Z_{n0} \cos \theta_{n+1}} \{ E_{in} (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} - Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) e_{cn} + E_{rn} (Z_{n0} \cos \theta_{n+1} + Z_{(n+1)0} \cos \theta_n) \}. \quad (5.116)$$

Амплитуда выходящей волны:

$$E_{r1} = \frac{D_{Er1}}{D_0} E_{rN}^{(0)} e_{cN}. \quad (5.117)$$

### 5.8. Электромагнитная волна. Наклонное падение. Поперечная поляризация

Для случая наклонного падения электромагнитной волны при поперечной поляризации геометрия задачи приведена на рис. 5.5.

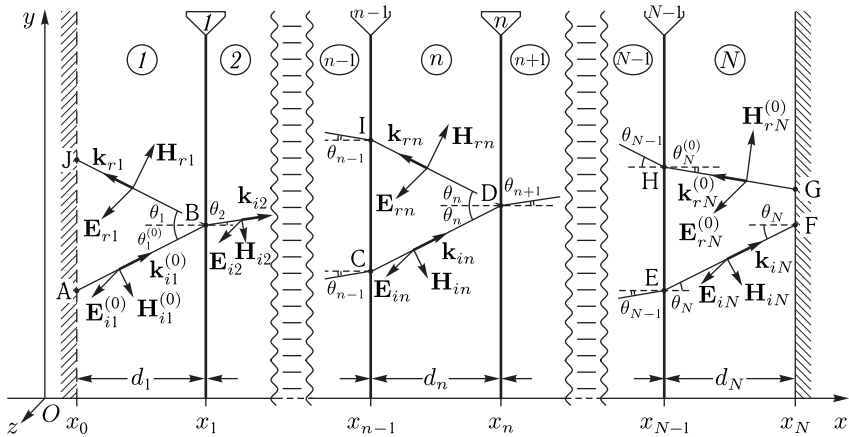


Рис. 5.5. Геометрия задачи для наклонного падения электромагнитной волны при поперечной поляризации

Геометрия структуры, волновых векторов и полей распространяющихся волн совпадают с обозначениями для случая продольной поляризации.

Падающие волны имеют поперечную поляризацию, что означает, что векторы магнитного поля этих волн ориентированы в плоскости падения, а векторы электрического поля в этой плоскости перпендикулярны.

Полагаем, что поляризация волны в процессе распространения не меняется, то есть векторы магнитных полей всех волн остаются в плоскости падения. При этом векторы электрического поля всех волн всегда остаются перпендикулярными этой плоскости.

Система координат выбрана таким образом, что ось  $Ox$  ориентирована перпендикулярно плоскостям границ раздела сред, ось  $Oy$  параллельна линиям пересечения плоскости падения с плоскостями границ, а ось  $Oz$  перпендикулярна к плоскости падения. Таким образом, плоскость  $Oxy$  совпадает с плоскостью падения волн.

Полагаем, что при отражении любой волны от границы раздела сред направление  $z$ -компоненты вектора ее электрического поля сохраняется,

а направление  $y$ -компоненты вектора магнитного поля меняется на противоположное.

Как и в предыдущем случае, здесь необходимо учитывать, что на границах падающие волны испытывают преломление, то есть углы падения  $\theta_n$  преобразуются в углы преломления  $\theta_{n\pm 1}$  в соответствии с законом Снеллиуса.

Последовательное распространение падающих волн аналогично распространению волн продольной поляризации и на рисунке обозначено теми же буквами.

Как и для продольной поляризации, первым этапом решения задачи является определение углов распространения внутренних волн в структуре, исходя из заданных значений  $\theta_1^{(0)}$  и  $\theta_1^{(N)}$ , что производится путем последовательного применения закона Снеллиуса в соответствии с формулами (5.1)–(5.6).

Поскольку электрическое и магнитное поля волны при известном значении угла  $\theta_n$  однозначно связаны, достаточно ограничиться рассмотрением только  $y$ -компоненты магнитного поля, для которой координатная часть волнового уравнения в среде с номером  $n$  имеет вид подобный (2.66) с учетом (2.80)–(2.83) (индекс « $z$ » опускаем):

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} + (k_n \cos \theta_n)^2 H_n = 0, \quad (5.118)$$

где

$$k_n = \omega \sqrt{\varepsilon_n \varepsilon_0 \mu_n \mu_0}. \quad (5.119)$$

Решение этого уравнения, нормированное относительно точки исхода волны, имеет вид суперпозиции волн прямого и встречного направлений:

$$H_n = H_{ni} e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} - H_{nr} e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}, \quad (5.120)$$

где  $H_{ni}$  и  $H_{nr}$  — произвольные постоянные. Знак минус перед вторым слагаемым подразумевает, что при одинаковых знаках постоянных  $H_{ni}$  и  $H_{nr}$  направления векторов магнитных полей прямой и встречной волн противоположны в силу изменения знака магнитного поля при отражении.

Обобщенный импеданс имеет вид:

$$Z_n = Z_{n0} \frac{H_{ni} e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} + H_{nr} e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}}{H_{ni} e^{-ik_n(x-x_{n-1}) \cos \theta_n} - H_{nr} e^{ik_n(x-x_n) \cos \theta_n}}, \quad (5.121)$$

где нулевой импеданс равен

$$Z_{n0} = \cos \theta \sqrt{\frac{\mu_n \mu_0}{\varepsilon_n \varepsilon_0}}. \quad (5.122)$$

Граничные условия на границе с номером  $n$  имеют вид:

$$H_n|_{x=x_n} = H_{n+1}|_{x=x_n}; \quad (5.123)$$

$$Z_n|_{x=x_n} = Z_{n+1}|_{x=x_n}. \quad (5.124)$$

В таком виде задача с точностью до обозначений и некоторых знаков аналогична задаче для наклонного падения акустической волны в жидкости, разобранный в разделе 5.5, поэтому приведем лишь конечные выражения, произведя соответствующую замену обозначений в соответствии с таблицей 2.1.

### 5.8.1. Падение прямой волны

#### Выходящая встречная волна

Входной импеданс среды  $N$  на границе  $N - 1$ :

$$Z_N^{(inA)} = Z_{N0}. \quad (5.125)$$

Формула для пересчета импедансов:

$$Z_n^{(inA)} = Z_{n0} \times \frac{(Z_{n0} \cos \theta_n + Z_{n+1}^{(inA)} \cos \theta_{n+1}) e_{cn}^{-1} - (Z_{n0} \cos \theta_n - Z_{n+1}^{(inA)} \cos \theta_{n+1}) e_{cn}}{(Z_{n0} \cos \theta_n + Z_{n+1}^{(inA)} \cos \theta_{n+1}) e_{cn}^{-1} + (Z_{n0} \cos \theta_n - Z_{n+1}^{(inA)} \cos \theta_{n+1}) e_{cn}}. \quad (5.126)$$

Амплитуда отраженной волны  $H_{r1}$ :

$$H_{r1} = \frac{D_{Hr1}}{D_0} H_{i1}^{(0)} e_{c1}. \quad (5.127)$$

#### Выходящая прямая волна

Амплитуды из граничных условий на границе  $N - 1$ :

$$H_{i(N-1)} = \frac{Z_{(N-1)0} \cos \theta_{N-1} + Z_{N0} \cos \theta_N}{2Z_{N0} \cos \theta_N} H_{iN} e_{c(N-1)}^{-1}; \quad (5.128)$$

$$H_{r(N-1)} = -\frac{Z_{(N-1)0} \cos \theta_{N-1} - Z_{N0} \cos \theta_N}{2Z_{N0} \cos \theta_N} H_{iN}. \quad (5.129)$$

Формулы для пересчета амплитуд:

$$H_{in} = \frac{1}{2Z_{(n+1)0} \cos \theta_{n+1}} \left\{ H_{i(n+1)} (Z_{n0} \cos \theta_n + Z_{(n+1)0} \cos \theta_{n+1}) - H_{r(n+1)} (Z_{n0} \cos \theta_n - Z_{(n+1)0} \cos \theta_{n+1}) e_{c(n+1)} \right\}. \quad (5.130)$$

$$H_{rn} = \frac{e_{cn}^{-1}}{2Z_{(n+1)0} \cos \theta_{n+1}} \left\{ -H_{i(n+1)} (Z_{n0} \cos \theta_n - Z_{(n+1)0} \cos \theta_{n+1}) + H_{r(n+1)} (Z_{n0} \cos \theta_n + Z_{(n+1)0} \cos \theta_{n+1}) e_{c(n+1)} \right\}. \quad (5.131)$$

Амплитуда проходящей волны  $H_{iN}$ :

$$H_{iN} = \frac{D_{HiN}}{D_0} H_{i1}^{(0)} e_{c1}. \quad (5.132)$$

### 5.8.2. Падение встречной волны

#### Выходящая прямая волна

Встречный входной импеданс в среде  $I$ :

$$Z_1^{(inB)} = -Z_{10}. \quad (5.133)$$

Формула для пересчета импедансов:

$$Z_n^{(inB)} = Z_{n0} \times \frac{(Z_{n0} \cos \theta_n + Z_{n-1}^{(inB)} \cos \theta_{n-1}) e_{cn} - (Z_{n0} \cos \theta_n - Z_{n-1}^{(inB)} \cos \theta_{n-1}) e_{cn}^{-1}}{(Z_{n0} \cos \theta_n + Z_{n-1}^{(inB)} \cos \theta_{n-1}) e_{cn} + (Z_{n0} \cos \theta_n - Z_{n-1}^{(inB)} \cos \theta_{n-1}) e_{cn}^{-1}}. \quad (5.134)$$

Амплитуда выходящей волны:

$$H_{iN} = \frac{D_{HiN}}{D_0} H_{rN}^{(0)} e_{cN}. \quad (5.135)$$

#### Выходящая встречная волна

Амплитуды из граничных условий на границе  $I$ :

$$H_{i2} = \frac{Z_{10} \cos \theta_1 - Z_{20} \cos \theta_2}{2Z_{10} \cos \theta_1} H_{r1}; \quad (5.136)$$

$$H_{r2} = \frac{Z_{10} \cos \theta_1 + Z_{20} \cos \theta_2}{2Z_{10} \cos \theta_1} \cdot H_{r1} e_{c2}^{-1}. \quad (5.137)$$

Формулы для пересчета амплитуд:

$$H_{i(n+1)} = \frac{1}{2Z_{n0} \cos \theta_n} \{ H_{in} (Z_{n0} \cos \theta_n + Z_{(n+1)0} \cos \theta_{n+1}) e_{cn} + H_{rn} (Z_{n0} \cos \theta_n - Z_{(n+1)0} \cos \theta_{n+1}) \}, \quad (5.138)$$

$$H_{i(n+1)} = \frac{e_{c(n+1)}^{-1}}{2Z_{n0} \cos \theta_n} \{ H_{in} (Z_{n0} \cos \theta_n - Z_{(n+1)0} \cos \theta_{n+1}) e_{cn} + H_{rn} (Z_{n0} \cos \theta_n + Z_{(n+1)0} \cos \theta_{n+1}) \}. \quad (5.139)$$

Амплитуда выходящей волны:

$$H_{r1} = \frac{D_{Hr1}}{D_0} H_{rN}^{(0)} e_{cN}. \quad (5.140)$$

## Выводы по главе 5

Данная глава посвящена описанию применения метода входного и выходного импедансов для решения задач о распространении волн различной природы прямого и встречного направлений через многослойные структуры, содержащие произвольное число слоев. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. На основе анализа результатов, полученных в предыдущих главах, установлено единство процессов распространения волн различной природы в многослойных структурах. Рассмотрены возможности применения аппарата обобщенного импеданса для случаев коллинеарного (нормального) и неколлинеарного (наклонного) падения волн. Для случая наклонного падения приведены соотношения, определяющие преломление волн на границах раздела сред.

2. На примере одномерной волны приведена общая схема расчета амплитуд выходящих из структуры волн в прямом и встречном направлениях при падении на обе внешние границы структуры волн прямого и встречного направлений.

3. В рамках аналогии и развития одномерного случая рассмотрено распространение акустических волн прямого и встречного направлений в случаях нормального и наклонного падения волн обоих направлений на обе внешние границы структуры. Приведены значения нулевого импеданса, определяемые параметрами сред — плотностью материала и скоростью распространения акустической волны. Приведены формулы пересчета обобщенного импеданса в прямом и встречном направлениях. Получены амплитуды волн, выходящих из структуры для всех перечисленных случаев.

4. Задача об одномерных волнах обобщена и расширена на случай электромагнитных волн. Рассмотрено распространение волн продольной и поперечной поляризации для нормального и наклонного падения на внешние границы структуры. Приведены значения нулевого импеданса, определяемые параметрами сред — магнитной и диэлектрической проницаемостями. Приведены формулы пересчета обобщенного импеданса в прямом и встречном направлениях. Получены амплитуды волн, выходящих из структуры для всех перечисленных случаев.

## Глава 6

# АДАПТАЦИЯ МЕТОДА ИМПЕДАНСА К РЕШЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Следующие четыре главы будут посвящены применению метода обобщенного импеданса для решения некоторых практических задач. Рассмотрены задачи о распространении волны через барьеры сложной формы, а также оценить корректность ступенчатого приближения неоднородной среды. Ввиду установленной в предыдущих главах общности понятия импеданса для волновых процессов различной природы, рассмотрение будет выполнено только для одномерной волны. Настоящая глава является вводной для следующих трех. Здесь еще раз более последовательно и подробно, чем в предыдущих главах, рассмотрено получение обобщенного импеданса для волн обоих направлений, приведен пошаговый алгоритм пересчета импедансов и амплитуд, удобный для машинного решения, а также получены коэффициенты отражения и прохождения.

В главе частично использован материал монографии [59, стр. 45–131], а также работы [103]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 6.1. Обобщенный импеданс для одномерной волны

Традиционно используемые представления импеданса относятся к электромагнитной и акустической волнам. Наиболее простым и в то же время достаточно общим видом волн являются одномерные, простейшими из которых можно считать волны в струне [54, стр. 23–27]. В то же время, в известной авторам литературе, кроме [59], понятие импеданса для одномерной волны отсутствует. Такое положение, по-видимому, связано с тем, что для одномерной волны дать аналог сопротивления, подобного фигурирующему в законе Ома, несколько труднее, так как аналоги тока и напряжения с очевидностью здесь не просматриваются. Тем не менее, следуя обычным приемам введения импеданса, исходящих из решения волнового уравнения (разделы 1.5, 1.6), можно ввести импеданс и для одномерной волны. Следуя [59, стр. 17–19], а также разделу 1.6, покажем, как это можно сделать для рассматриваемой здесь задачи.

Будем исходить из классического волнового уравнения для одномерной волны [54, стр. 26]:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad (6.1)$$

где  $G$  — волновая функция,  $a$  — фазовая скорость волны.

Введем новые переменные:

$$u = \frac{1}{\omega} \frac{\partial G}{\partial t}; \quad (6.2)$$

$$v = -\frac{\partial G}{\partial x}. \quad (6.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \omega u, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -v. \quad (6.5)$$

Подставим (6.4) и (6.5) в (6.1), после чего независимо продифференцируем  $u$  по  $x$  и  $v$  по  $t$  и приравняем смешанные производные. В результате получим два уравнения, образующие систему:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\omega}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6.7)$$

Дифференцируя первое уравнение по  $x$  и подставляя в полученное соотношение второе, получаем волновое уравнение для  $u$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6.8)$$

Аналогично, дифференцируя второе уравнение по  $x$  и подставляя в него первое, получаем волновое уравнение для  $v$ :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (6.9)$$

Волновые уравнения второго порядка (6.8)–(6.9) допускают решение в виде плоских волн [54, стр. 51], [126, стр. 195, форм. (11.42)]:

$$u = u_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (6.10)$$

$$v = v_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (6.11)$$

где  $u_0$  и  $v_0$  — постоянные амплитуды,  $k$  — волновое число, равное

$$k = \frac{\omega}{a}. \quad (6.12)$$



Подставляя (6.10)–(6.11) в (6.6)–(6.7), получаем:

$$ku_0 = \frac{1}{\omega} \omega v_0, \quad (6.13)$$

$$kv_0 = \frac{\omega}{a^2} \omega u_0. \quad (6.14)$$

Разделив первое уравнение на второе и выделяя отношение  $u_0$  к  $v_0$ , получаем:

$$\frac{u_0}{v_0} = \frac{a}{\omega}. \quad (6.15)$$

Будем считать одномерным волновым импедансом  $Z_u$  отношение  $u/v$ , где  $u$  и  $v$  определяются формулами (6.10) и (6.11). При этом с учетом (6.15) получаем:

$$Z_u = \frac{u}{v} = \frac{u_0}{v_0} = \frac{a}{\omega}. \quad (6.16)$$

Таким образом, одномерный волновой импеданс представляет собой отношение скорости волны, распространяющейся в среде, к частоте этой волны. В случае среды, скорость волны в которой зависит от координаты, импеданс также получается зависящим от этой координаты.

Введем удобный для практики вид выражения для одномерного волнового импеданса. Так, учитывая (6.2)–(6.3) и временную зависимость  $e^{i\omega t}$ , из (6.5) получаем формулу, подобную (1.125):

$$Z_u = -\frac{iG}{\partial G/\partial x}. \quad (6.17)$$

Полагая далее зависимость от координаты в виде  $e^{-ikx}$ , получаем:

$$Z_u = \frac{1}{k}. \quad (6.18)$$

Заметим, что эта формула справедлива только для одной волны с волновым числом  $k$ , распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$ . В среде, скорость волны в которой зависит от координаты, волновое число в соответствии с (6.12) также получается зависящим от координаты, поэтому  $Z_u$  также с координатой претерпевает изменение.

Выделим гармоническую зависимость от времени в виде экспоненциального множителя, то есть будем считать:

$$G = Ue^{i\omega t}. \quad (6.19)$$

Подставляя (6.19) в (6.17) и учитывая волновое число в виде (6.12), получаем уравнение для координатной составляющей волны:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + k^2 U = 0. \quad (6.20)$$

Полное решение этого уравнения имеет вид суперпозиции волн прямого и встречного (обратного) направлений:

$$U = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \quad (6.21)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Поскольку в (6.17) явная зависимость от времени отсутствует, подставляя в это выражение (6.19), получаем выражение импеданса через координатную функцию  $U$  в виде:

$$Z_u = -\frac{iU}{\partial U/\partial x}. \quad (6.22)$$

Отличие этой формулы от (6.17) состоит в том, что в (6.17) рассматривается полная волновая функция  $G(x, t)$ , а в (6.22) — только ее координатная часть  $U(x)$ , определяемая формулой (6.21).

Из (6.21) найдем производную:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -ik(Ae^{-ikx} - Be^{ikx}). \quad (6.23)$$

Подставляя (6.21) и (6.23) в (6.22), получаем:

$$Z_u = \frac{1}{k} \frac{Ae^{-ikx} + Be^{ikx}}{Ae^{-ikx} - Be^{ikx}}. \quad (6.24)$$

Вводя «нулевой импеданс» с помощью обозначения

$$Z_{u0} = \frac{1}{k}, \quad (6.25)$$

получаем

$$Z_u = Z_{u0} \frac{Ae^{-ikx} + Be^{ikx}}{Ae^{-ikx} - Be^{ikx}}. \quad (6.26)$$

Это выражение будем называть далее «обобщенным импедансом для одномерной волны».

Можно видеть, что определенный таким образом обобщенный импеданс кроме амплитуд волн прямого  $A$  и встречного  $B$  направлений зависит от координаты точки  $x$ , от параметров среды в этой точке (через скорость  $a$ ), а также от частоты волны (через волновое число  $k$ ). Поскольку частота в большинстве случаев сохраняется постоянной, то можно считать, что обобщенный импеданс определяется амплитудами обеих волн, координатой точки  $x$  и волновым числом в этой точке  $k$ . При отсутствии встречной волны, то есть при  $B = 0$ , обобщенный импеданс в заданной точке определяется только локальным волновым числом и совпадает с нулевым импедансом, имеющим также локальный характер. При отсутствии прямой волны, то есть при  $A = 0$ , обобщенный импеданс остается равным нулевому с обратным знаком.

### 6.1.1. Общая геометрия задачи

Общая геометрия задачи для структуры с произвольным числом слоев совпадает с принятой в разделе 4.6 (рис. 4.5). Для удобства читателя, приведем здесь ее еще раз на рис. 6.1.

Структура содержит  $N$  плоскопараллельных слоев, разделенных  $N - 1$  границами. Ось координат  $Ox$  ориентирована перпендикулярно

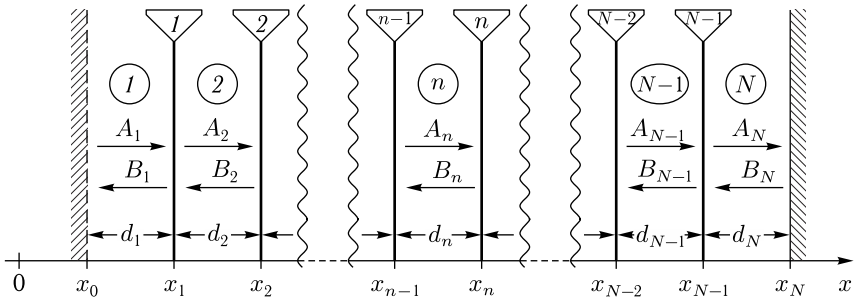


Рис. 6.1. Геометрия задачи для структуры с произвольным числом слоев. Цифры в кругах — номера сред, цифры в треугольниках — номера границ

плоскостям слоев структуры. Начало структуры соответствует  $x = x_0$ , конец —  $x = x_N$ . Толщины слоев определяются формулой:

$$d_n = x_n - x_{n-1} \tag{6.27}$$

при изменении  $n$  от 1 до  $N$ .

В пределах каждого слоя среда является однородной, а от слоя к слою параметры сред могут меняться.

В каждом слое распространяются две волны: волна прямого направления, распространяющаяся вдоль положительного направления оси  $Ox$ , имеющая амплитуду  $A_n$ , и волна встречного направления, распространяющаяся вдоль отрицательного направления оси  $Ox$ , имеющая амплитуду  $B_n$ .

На крайних границах структуры, то есть при  $x = x_0$  и  $x = x_N$  отражение волн того и другого направлений отсутствует.

В структуре распространяются гармонические волны, координатная составляющая которых подчиняется волновому уравнению (6.20)

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + k_n^2 U_n = 0, \tag{6.28}$$

полное решение которого имеет вид:

$$U_n = A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}, \tag{6.29}$$

где  $A_n$  и  $B_n$  — амплитуды волн прямого и встречного направлений.

Волновые числа  $k_n$  во всех средах структуры предполагаются известными. Обратные величины волновых чисел представляют собой нулевые импедансы сред, определяемые формулой

$$Z_{n0} = \frac{1}{k_n}. \tag{6.30}$$

В общем случае будем полагать, что в структуру со стороны среды 1 входит прямая волна с амплитудой  $A_1$ . При этом в той же среде возникает отраженная волна встречного направления с амплитудой  $B_1$ . Будем полагать также, что в среде  $N$  распространяется только одна

проходящая волна прямого направления с амплитудой  $A_N$ , а волна встречного направления с амплитудой  $B_N$  отсутствует, то есть  $B_N = 0$ .

Главной задачей следующего далее рассмотрения будет нахождение коэффициентов отражения  $R_e$  и прохождения  $T_e$  по энергиям относительно всей структуры в целом:

$$R_e = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2; \quad (6.31)$$

$$T_e = \left| \frac{A_N}{A_1} \right|^2 \operatorname{Re} \left( \frac{k_N}{k_1} \right). \quad (6.32)$$

### 6.1.2. Общий характер последовательного рассмотрения

В предыдущем разделе 6.1.1 показано, что в каждом участке структуры, среда в пределах которого остается однородной, имеются характерные параметры — амплитуды волн прямого и обратного направлений и обобщенный импеданс.

Традиционные условия на границе между средами требуют совпадения амплитуд и их производных по координате по обе стороны от границы. Поскольку обобщенный импеданс обратно пропорционален производной (6.22), то условие равенства производных может быть заменено на условие равенства импедансов. Таким образом, будем требовать на границах между участками равенства амплитуд и импедансов.

Техника последовательного рассмотрения подразумевает последовательный пересчет амплитуд и импедансов от одного конца структуры к другому, то есть от того конца, где эти параметры заданы, до другого, где их требуется определить.

Таким образом, возможны два механизма пересчета — пересчет импедансов и пересчет амплитуд. Рассмотрим эти механизмы по отдельности и начнем с пересчета импедансов.

## 6.2. Пересчет импедансов

Для пересчета импедансов рассмотрим сначала вспомогательные понятия входного и выходного импедансов.

### 6.2.1. Входной и выходной импедансы

Как показано выше, обобщенный импеданс зависит от координаты, то есть его величина в пределах однородного участка меняется, однако важными для рассмотрения являются значения импеданса только на границах между средами. Для характеристики таких значений введем понятие входного и выходного импедансов.

Будем рассматривать в качестве основного положительное направление оси  $Ox$ . При этом будем называть импеданс на начальной границе какого-либо участка однородной среды — «входным» по отношению к этому участку, а на ее конечной границе — «выходным» по отношению

к тому же участку. Схема формирования входного и выходного импедансов на участке структуры, содержащем среды с номерами  $n$  и  $n + 1$  показана на рис. 6.2.

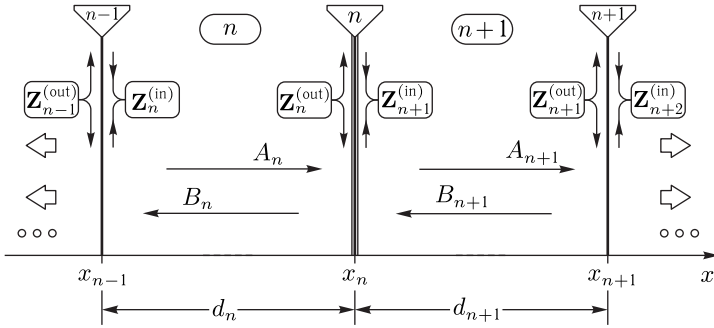


Рис. 6.2. Схема формирования входных и выходных импедансов на участке структуры, содержащем среды с номерами  $n$  и  $n + 1$

Показаны две следующие друг за другом среды с номерами  $n$  и  $n + 1$ . Среда  $n$  заключена между границами  $n - 1$  и  $n$ , ее толщина равна  $d_n$ . Среда  $n + 1$  заключена между границами  $n$  и  $n + 1$ , ее толщина равна  $d_{n+1}$ . Слева от границы  $n - 1$  и справа от границы  $n + 1$  располагаются другие среды, входящие в состав структуры (на рисунке не показаны).

В среде  $n$  распространяются волна прямого направления  $A_n$  и волна встречного направления  $B_n$ . В среде  $n + 1$  таковыми являются волны  $A_{n+1}$  и  $B_{n+1}$ .

Обобщенный импеданс в среде  $n$  имеет вид:

$$Z_n = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}}{A_n e^{-ik_n x} - B_n e^{ik_n x}}. \quad (6.33)$$

Входной границей в этой среде является граница при  $x = x_{n-1}$ , в выходной — граница при  $x = x_n$ .

Таким образом, полагая  $x = x_{n-1}$ , получаем входной импеданс:

$$Z_n^{(in)} = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n x_{n-1}} + B_n e^{ik_n x_{n-1}}}{A_n e^{-ik_n x_{n-1}} - B_n e^{ik_n x_{n-1}}}, \quad (6.34)$$

а полагая  $x = x_n$ , получаем выходной импеданс:

$$Z_n^{(out)} = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n x_n} + B_n e^{ik_n x_n}}{A_n e^{-ik_n x_n} - B_n e^{ik_n x_n}}. \quad (6.35)$$

В среде  $n + 1$  обобщенный импеданс имеет вид:

$$Z_{n+1} = Z_{(n+1)0} \frac{A_{n+1} e^{-ik_{n+1} x} + B_{n+1} e^{ik_{n+1} x}}{A_{n+1} e^{-ik_{n+1} x} - B_{n+1} e^{ik_{n+1} x}}. \quad (6.36)$$

Соответственно входной импеданс получаем при  $x = x_n$ :

$$Z_{n+1}^{(\text{in})} = Z_{(n+1)0} \frac{A_{n+1} e^{-ik_{n+1}x_n} + B_{n+1} e^{ik_{n+1}x_n}}{A_{n+1} e^{-ik_{n+1}x_n} - B_{n+1} e^{ik_{n+1}x_n}}, \quad (6.37)$$

а выходной — при  $x = x_{n+1}$ :

$$Z_{n+1}^{(\text{out})} = Z_{(n+1)0} \frac{A_{n+1} e^{-ik_{n+1}x_{n+1}} + B_{n+1} e^{ik_{n+1}x_{n+1}}}{A_{n+1} e^{-ik_{n+1}x_{n+1}} - B_{n+1} e^{ik_{n+1}x_{n+1}}}. \quad (6.38)$$

### 6.2.2. Граничное условие для импедансов

Рассмотрим теперь границу с номером  $n$ , где будем требовать равенства выходного импеданса в среде  $n$  и входного в среде  $n + 1$ .

Граничное условие равенства импедансов на границе  $n$  примем в виде:

$$Z_n|_{x=x_n} = Z_{n+1}|_{x=x_{n+1}}. \quad (6.39)$$

Записывая через определения входного и выходного импедансов, получаем:

$$Z_n^{(\text{out})} = Z_{n+1}^{(\text{in})}. \quad (6.40)$$

Здесь  $Z_n^{(\text{out})}$  определяется формулой (6.35), а  $Z_{n+1}^{(\text{in})}$  — формулой (6.37).

### 6.2.3. Формулировка задачи пересчета импедансов

Будем полагать, что структура содержит  $N$  сред, которые пронумерованы от 1 до  $N$ . Задача пересчета импедансов состоит в том, чтобы найти входной импеданс  $Z_1^{(\text{in})}$  среды 1, если известен входной импеданс  $Z_N^{(\text{in})}$  среды  $N$ . При этом полагаются известными во всех средах волновые числа  $k_n$  и координаты границ между средами  $x_n$ . В этом случае длины отрезков всех сред вычисляются по формуле

$$d_n = x_n - x_{n-1}, \quad (6.41)$$

а нулевые импедансы по формуле

$$Z_{n0} = \frac{1}{k_n}. \quad (6.42)$$

### 6.2.4. Пересчет импедансов для соседствующих сред

В качестве основы получим сначала формулу, связывающую входные импедансы для двух соседствующих сред  $n$  и  $n + 1$ , то есть выражающую  $Z_n^{(\text{in})}$  через  $Z_{n+1}^{(\text{in})}$ . Согласно граничному условию (6.40), импеданс  $Z_{n+1}^{(\text{in})}$  может быть заменен на импеданс  $Z_n^{(\text{out})}$ . То есть сначала выразим  $Z_n^{(\text{in})}$  через  $Z_n^{(\text{out})}$ . Как показано выше, эти импедансы

выражаются формулами (6.34) и (6.35). Для упрощения записи введем временные вспомогательные обозначения:

$$\alpha = e^{-ik_n x_{n-1}}; \quad (6.43)$$

$$\beta = e^{ik_n x_{n-1}}; \quad (6.44)$$

$$\gamma = e^{-ik_n x_n}; \quad (6.45)$$

$$\delta = e^{ik_n x_n}. \quad (6.46)$$

С этими обозначениями (6.34) и (6.35) принимают вид:

$$Z_n^{(\text{in})} = Z_{n0} \frac{A_n \alpha + B_n \beta}{A_n \alpha - B_n \beta}, \quad (6.47)$$

$$Z_n^{(\text{out})} = Z_{n0} \frac{A_n \gamma + B_n \delta}{A_n \gamma - B_n \delta}. \quad (6.48)$$

Пользуясь (6.48), выразим  $B_n$  через  $B_{n-1}$ :

$$B_n = \frac{\gamma(Z_n^{(\text{out})} - Z_{n0})}{\delta(Z_n^{(\text{out})} + Z_{n0})} A_n. \quad (6.49)$$

Подставляя это выражение в (6.47), получаем:

$$Z_n^{(\text{in})} = Z_{n0} \frac{A_n \alpha + \frac{\gamma(Z_n^{(\text{out})} - Z_{n0})}{\delta(Z_n^{(\text{out})} + Z_{n0})} \beta A_n}{A_n \alpha - \frac{\gamma(Z_n^{(\text{out})} - Z_{n0})}{\delta(Z_n^{(\text{out})} + Z_{n0})} \beta A_n}. \quad (6.50)$$

Упрощая многоэтажную запись и сокращая на  $B_n$ , получаем:

$$Z_n^{(\text{in})} = Z_{n0} \frac{\alpha \delta (Z_n^{(\text{out})} + Z_{n0}) + \gamma \beta (Z_n^{(\text{out})} - Z_{n0})}{\alpha \delta (Z_n^{(\text{out})} + Z_{n0}) - \gamma \beta (Z_n^{(\text{out})} - Z_{n0})}. \quad (6.51)$$

Пользуясь (6.43)–(6.46), а также учитывая (6.41), находим:

$$\alpha \delta = e^{ik_n(x_n - x_{n-1})} = e^{ik_n d_n}; \quad (6.52)$$

$$\gamma \beta = e^{-ik_n(x_n - x_{n-1})} = e^{-ik_n d_n}. \quad (6.53)$$

Подставляя эти выражения в (6.51), заменяя  $Z_n^{(\text{out})}$  на  $Z_{n+1}^{(\text{in})}$  в соответствии с (6.40), а также меняя в скобках порядок следования слагаемых, получаем:

$$Z_n^{(\text{in})} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(\text{in})})e^{ik_n d_n} - (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(\text{in})})e^{-ik_n d_n}}{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(\text{in})})e^{ik_n d_n} + (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(\text{in})})e^{-ik_n d_n}}. \quad (6.54)$$

Таким образом, получена формула, позволяющая выразить входной импеданс в предшествующей среде  $Z_n^{(\text{in})}$  через входной импеданс в последующей среде  $Z_{n+1}^{(\text{in})}$ . То есть, если известен входной импеданс в среде  $n + 1$ , то можно найти входной импеданс в среде  $n$ . Эта формула имеет рекуррентный характер и является основной в задаче пересчета

импедансов. При этом пересчет осуществляется последовательным переходом от конца структуры к ее началу, то есть от среды  $N$  к среде  $1$ . Заметим, что подобная формула уже была проучена в разделе 4.9 в виде (4.271), однако здесь ее вывод выполнен более последовательным образом.

**Замечание.** Полученная здесь формула (6.54), по существу является обобщением известной формулы пересчета импедансов с одной границы слоя на другую [4, стр. 16, форм. (3.9)], а также формулы для произвольного номера промежуточной среды в многослойной структуре [4, стр. 21, форм. (3.37)]. Отличие между структурами формул состоит в том, что здесь используются экспоненты с мнимыми показателями, а в приведенных ссылках экспоненты преобразованы в тангенсы с помощью известной формулы Эйлера [123, стр. 76, форм. (408.05)]. Специфика трактовки, используемой в [4], состоит в рассмотрении частных задач для акустических и электромагнитных волн. Здесь же рассматривается более общий случай одномерной волны, для чего введено общее понятие импеданса для такой волны (6.17), с помощью которого введено понятие обобщенного импеданса (6.26). В рамках настоящей работы использование формулы пересчета импедансов в виде (6.54) представляется более удобным, так как позволяет достаточно просто перейти к пересчету импедансов и амплитуд на границах структуры, в том числе для встречных волн общего характера.

### 6.2.5. Особенность пересчета на конце структуры

Согласно формуле (6.54), для того, чтобы найти входной импеданс в среде  $1$  надо знать входной импеданс в среде  $2$ , для определения которого нужен входной импеданс в среде  $3$  и так далее вплоть до среды  $N - 1$ , для которой формула (6.54) принимает вид:

$$Z_{N-1}^{(in)} = Z_{(N-1)0} \times \frac{(Z_{(N-1)0} + Z_N^{(in)})e^{ik_{N-1}d_{N-1}} - (Z_{(N-1)0} - Z_N^{(in)})e^{-ik_{N-1}d_{N-1}}}{(Z_{(N-1)0} + Z_N^{(in)})e^{ik_{N-1}d_{N-1}} + (Z_{(N-1)0} - Z_N^{(in)})e^{-ik_{N-1}d_{N-1}}}. \quad (6.55)$$

Таким образом, для получения входного импеданса в этой среде нужен входной импеданс в среде  $N$ , то есть  $Z_N^{(in)}$ . Согласно формуле (6.54), такой импеданс определяется выражением

$$Z_N^{(in)} = Z_{N0} \frac{(Z_{N0} + Z_{N+1}^{(in)})e^{ik_N d_N} - (Z_{N0} - Z_{N+1}^{(in)})e^{-ik_N d_N}}{(Z_{N0} + Z_{N+1}^{(in)})e^{ik_N d_N} + (Z_{N0} - Z_{N+1}^{(in)})e^{-ik_N d_N}}. \quad (6.56)$$

Можно видеть, что для определения этого импеданса полученная формула является неприменимой, так как здесь требуется входной импеданс в среде  $N + 1$ , которая в рассматриваемой структуре отсутствует.



Неопределенность можно разрешить, если положить, что волна встречного направления в среде  $N$  отсутствует. В самом деле, в соответствии с формулой (6.34) имеем:

$$Z_N^{(in)} = Z_{N0} \frac{A_N e^{-ik_N x_{N-1}} + B_N e^{ik_N x_{N-1}}}{A_N e^{-ik_N x_{N-1}} - B_N e^{ik_N x_{N-1}}}, \quad (6.57)$$

Полагая в этой формуле  $B_N = 0$ , получаем:

$$Z_N^{(in)} = Z_{N0}. \quad (6.58)$$

При этом формула (6.55) принимает вид:

$$Z_{N-1}^{(in)} = Z_{(N-1)0} \times \frac{(Z_{(N-1)0} + Z_{N0})e^{ik_{N-1}d_{N-1}} - (Z_{(N-1)0} - Z_{N0})e^{-ik_{N-1}d_{N-1}}}{(Z_{(N-1)0} + Z_{N0})e^{ik_{N-1}d_{N-1}} + (Z_{(N-1)0} - Z_{N0})e^{-ik_{N-1}d_{N-1}}}, \quad (6.59)$$

то есть становится полностью определенной.

Таким образом, первым шагом пересчета импедансов является определение входного импеданса в среде  $N$  по формуле (6.58), затем с использованием формулы (6.54) рассчитывается импеданс в среде  $N - 1$  и так далее вплоть до среды  $1$ , где будет определен входной импеданс  $Z_1^{(in)}$ , что и является решением поставленной задачи.

**Замечание.** Заметим, что требование отсутствия волны встречного направления в среде  $N$  ограничивает область применения метода пересчета импедансов, однако эта область остается достаточно широкой. Так, встречная волна в среде  $N$  отсутствует, если граница структуры в целом при  $x = x_N$  является неотражающей или в пределах этой среды волна прямого направления затухает настолько, что отраженная волна почти полностью отсутствует. Также предполагается, что со стороны конца структуры внешнее возбуждение отсутствует, то есть в среду  $N$  волна извне не поступает. Кроме того, граница структуры при  $x = x_N$  может быть удалена от границы при  $x = x_{N-1}$  на расстояние бесконечно большое, так что волна прямого направления просто теряется, не вызывая отражения.

### 6.2.6. Схема пошагового пересчета импедансов

Приведем схему пошагового пересчета входного импеданса среды  $B_{n-1}$ , то есть  $Z_N^{(in)}$ , во входной импеданс среды  $1$ , то есть  $Z_1^{(in)}$  при условии отсутствия в среде  $N$  волны встречного направления. Представим последовательные действия по шагам в виде, удобном для формирования машинного алгоритма.

Будем полагать, что все участки структуры являются однородными, причем длины и волновые числа для каждого участка известны. То есть, если изначально задаются только параметры среды (например, в случае электромагнитных волн — диэлектрическая и магнитная проницаемости), то в качестве предварительного этапа надо решить

волновые уравнения в каждом участке среды и найти соответствующие волновые числа.

Прежде всего следует сформировать подпрограмму, рассчитывающую в соответствии с формулой (6.54) входной импеданс предыдущей среды  $Z_n^{(in)}$  через входной импеданс последующей среды  $Z_{n+1}^{(in)}$ . При этом в качестве входных параметров подпрограммы будет выступать волновое число  $k_n$  и длина  $d_n$  и нулевой импеданс  $Z_{n0}$  среды  $n$ , в также входной импеданс  $Z_{n+1}^{(in)}$  среды  $n + 1$ . выходным же параметром будет входной импеданс  $Z_n^{(in)}$  среды  $n$ .

Дальнейшая последовательность шагов следующая.

#### **Шаг № 1.**

Из полной структуры выделить единичные участки и границы между ними. Задать длины участков и определить полное число участков. Для всех участков задать соответствующие волновые числа.

#### **Шаг № 2.**

Для среды  $N$  задать входной импеданс  $Z_N^{(in)}$  по формуле (6.57).

#### **Шаг № 3.**

Путем обращения к подпрограмме, использующей формулу (6.54), по данным входного импеданса среды  $N$  найти входной импеданс среды  $N - 1$ .

#### **Шаг № 4.**

Повторять в цикле шаг № 3 с уменьшением всех индексов на единицу, вплоть до первого участка структуры с номером 1, в результате чего будет получен входной импеданс  $Z_1^{(in)}$ .

#### **Шаг № 5.**

Вывести полученное значение входного импеданса первой среды  $Z_1^{(in)}$ , а также другие необходимые данные по заданию оператора на внешний носитель.

### **6.2.7. Коэффициент отражения**

Рассмотрим применение пересчета импедансов для определения коэффициента отражения волны от структуры в целом.

Будем полагать, что в среде  $I$  распространяется волна прямого направления с амплитудой  $A_1$ . В результате отражения от структуры в целом в той же среде  $I$  распространяется волна встречного направления с амплитудой  $B_1$ .

Согласно формуле (6.49) при  $n = 1$ , получаем:

$$B_1 = \frac{\gamma_1(Z_1^{(out)} - Z_{10})}{\delta_1(Z_1^{(out)} + Z_{10})} A_1, \quad (6.60)$$

где  $\gamma_1$  и  $\delta_1$  определяются формулами (6.45) и (6.46) при  $n = 1$ .

Из условия равенства импедансов на границе при  $x = x_1$  получаем:

$$Z_1^{(\text{out})} = Z_2^{(\text{in})}. \quad (6.61)$$

Заменяя  $Z_1^{(\text{out})}$  в формуле (6.60) на  $Z_2^{(\text{in})}$  и изменяя порядок слагаемых в скобках, получаем:

$$B_1 = \frac{\gamma_1(Z_{10} - Z_2^{(\text{out})})}{\delta_1(Z_{10} + Z_2^{(\text{out})})} A_1. \quad (6.62)$$

Согласно классическому определению [3, стр. 67, форм. (27)], коэффициент отражения по энергии равен:

$$R_e = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2. \quad (6.63)$$

Подставляя в эту формулу (6.62), получаем коэффициент отражения по энергиям от структуры в целом в виде:

$$R_e = \left| \frac{Z_{10} - Z_2^{(\text{in})}}{Z_{10} + Z_2^{(\text{in})}} \right|. \quad (6.64)$$

Требуемое здесь значение  $Z_2^{(\text{in})}$  должно быть определено на шаге № 4 предложенного выше алгоритма при пересчете импеданса от среды  $N$  до среды 2, то есть  $Z_2^{(\text{in})}$  в конечном счете определяется через  $Z_{N0}$ .

Для получения коэффициента отражения приведенный в предыдущем разделе 6.2.6 пошаговый алгоритм должен быть, начиная с шага № 4, изменен и дополнен следующими шагами:

#### **Шаг № 4.**

Повторять в цикле шаг № 3 с уменьшением всех индексов на единицу, вплоть до второго участка структуры с номером 2, в результате чего будет получен входной импеданс  $Z_2^{(\text{in})}$ .

#### **Шаг № 5.**

Вычислить амплитуду  $B_1$  волны встречного направления в среде 1 по формуле (6.62).

#### **Шаг № 6.**

Вычислить коэффициент отражения  $R_e$  с использованием значений амплитуд  $A_1$  и  $B_1$  по формуле (6.63).

#### **Шаг № 7.**

Вывести полученное значение амплитуды встречной волны в среде 1 и коэффициент отражения  $R_e$ , а также другие необходимые данные по заданию оператора на внешний носитель.

При отсутствии необходимости определения амплитуды встречной волны  $B_1$ , шаги № 5 и № 6 можно заменить одним шагом, который теперь будет иметь номер 5, после чего будет следовать вывод получен-

ных данных в шаге №6. То есть последовательность шагов, начиная с шага №4, будет иметь вид:

**Шаг №4.**

Повторять в цикле шаг №3 с уменьшением всех индексов на единицу, вплоть до второго участка структуры с номером 2, в результате чего будет получен входной импеданс  $Z_2^{(in)}$ .

**Шаг №5.**

Вычислить коэффициент отражения  $R_e$  с использованием значений импедансов  $Z_{10}$  и  $Z_2^{(in)}$  по формуле (6.64).

**Шаг №6.**

Вывести полученное значение коэффициента отражения  $R_e$ , а также другие необходимые данные по заданию оператора на внешний носитель.

### 6.3. Пересчет амплитуд

Задача пересчета амплитуд состоит в том, чтобы найти волну  $B_1$ , отраженную от структуры, и волну  $A_N$ , проходящую через структуру, при условии, что задана входящая волна  $A_1$  в первой среде структуры. При этом полагаются известными во всех средах волновые числа  $k_n$  и координаты границ между средами  $x_n$ . При этом длины отрезков следующих друг за другом сред  $n$  и  $n-1$  вычисляются по формулам

$$d_n = x_n - x_{n-1}; \quad (6.65)$$

$$d_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2}, \quad (6.66)$$

а нулевые импедансы тех же сред — по формулам

$$Z_{n0} = \frac{1}{k_n}; \quad (6.67)$$

$$Z_{(n-1)0} = \frac{1}{k_{n-1}}. \quad (6.68)$$

Итак, приступаем к решению.

Пересчет выполняется последовательными шагами — от конца структуры к ее началу, то есть от среды  $N$  до среды  $1$ . Каждый шаг состоит в том, чтобы, полагая известными амплитуды волн обоих направлений  $A_n$  и  $B_n$  в среде  $n$ , выразить через них амплитуды волн обоих направлений  $A_{n-1}$  и  $B_{n-1}$  в среде  $n-1$ . Между этими средами находится граница с номером  $n-1$ . Получим формулы, связывающие эти амплитуды.

Схема участка структуры по обе стороны от границы  $n-1$  приведена на рис. 6.3.

Показаны две следующие друг за другом среды с номерами  $n-1$  и  $n$ . Среда  $n-1$  заключена между границами  $n-2$  и  $n-1$ , ее толщина равна  $d_{n-1}$ . Среда  $n$  заключена между границами  $n-1$  и  $n$ ,

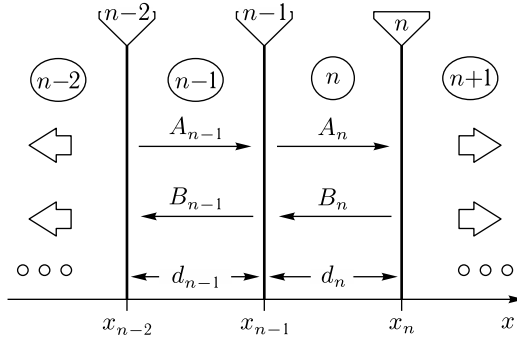


Рис. 6.3. Геометрия участка структуры, рассматриваемого в задаче о пересчете амплитуд

ее толщина равна  $d_n$ . В среде  $n - 1$  в прямом направлении распространяется волна  $A_{n-1}$ , во встречном — волна  $B_{n-1}$ . Соответственно в среде  $n$  прямая волна —  $A_n$ , встречная —  $B_n$ . Слева от границы  $n - 2$  и справа от границы  $n$  располагаются другие среды, входящие в состав структуры (на рисунке не показаны).

Предполагается, что соотношение амплитуд волн на границе  $n - 1$  полностью определяется амплитудами волн в средах  $n - 1$  и  $n$ . Соответствующие граничные условия — равенство смещений и импедансов, имеют вид:

$$U_n|_{x=x_{n-1}} = U_{n-1}|_{x=x_{n-1}}; \tag{6.69}$$

$$Z_n|_{x=x_{n-1}} = Z_{n-1}|_{x=x_{n-1}}. \tag{6.70}$$

Запишем эти смещения и импедансы по отдельности, нормируя волны относительно точек их исхода.

### 6.3.1. Смещения

Смещение в среде  $n$ :

$$U_n = A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_n)}. \tag{6.71}$$

На границе при  $x = x_{n-1}$  это смещение принимает вид:

$$U_n|_{x=x_{n-1}} = A_n e^{-ik_n(x_{n-1}-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x_{n-1}-x_n)}. \tag{6.72}$$

Используя обозначения (6.65), (6.66), получаем:

$$U_n|_{x=x_{n-1}} = A_n + B_n e^{-ik_n d_n}. \tag{6.73}$$

Введем обозначение

$$e_n = e^{-ik_n d_n}. \tag{6.74}$$

С этим обозначением получаем:

$$U_n|_{x=x_{n-1}} = A_n + B_n e_n. \tag{6.75}$$

Смещение в среде  $n - 1$ :

$$U_{n-1} = A_{n-1}e^{-ik_{n-1}(x-x_{n-2})} + B_{n-1}e^{ik_{n-1}(x-x_{n-1})}. \quad (6.76)$$

На границе при  $x = x_{n-1}$  это смещение принимает вид:

$$U_{n-1}|_{x=x_{n-1}} = A_{n-1}e^{-ik_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})} + B_{n-1}e^{ik_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-1})}. \quad (6.77)$$

Используя обозначения (6.65), (6.66), получаем:

$$U_{n-1}|_{x=x_{n-1}} = A_{n-1}e^{-ik_{n-1}d_{n-1}} + B_{n-1}. \quad (6.78)$$

Введем обозначение

$$e_{n-1} = e^{-ik_{n-1}d_{n-1}}. \quad (6.79)$$

С этим обозначением получаем:

$$U_{n-1}|_{x=x_{n-1}} = A_{n-1}e_{n-1} + B_{n-1}. \quad (6.80)$$

### 6.3.2. Импедансы

Обобщенный импеданс в среде  $n$ , нормированный относительно точек исхода волн, имеет вид:

$$Z_n = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_n)}}{A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} - B_n e^{ik_n(x-x_n)}}. \quad (6.81)$$

На границе при  $x = x_{n-1}$  этот импеданс принимает вид:

$$Z_n|_{x=x_{n-1}} = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n(x_{n-1}-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x_{n-1}-x_n)}}{A_n e^{-ik_n(x_{n-1}-x_{n-1})} - B_n e^{ik_n(x_{n-1}-x_n)}}. \quad (6.82)$$

Используя обозначения (6.65), (6.66), получаем:

$$Z_n|_{x=x_{n-1}} = Z_{n0} \frac{A_n + B_n e^{-ik_n d_n}}{A_n - B_n e^{-ik_n d_n}}. \quad (6.83)$$

Используя обозначение (6.74), получаем:

$$Z_n|_{x=x_{n-1}} = Z_{n0} \frac{A_n + B_n e_n}{A_n - B_n e_n}. \quad (6.84)$$

Обобщенный импеданс в среде  $n - 1$ , нормированный относительно точек исхода волн, имеет вид:

$$Z_{n-1} = Z_{(n-1)0} \frac{A_{n-1} e^{-ik_{n-1}(x-x_{n-2})} + B_{n-1} e^{ik_{n-1}(x-x_{n-1})}}{A_{n-1} e^{-ik_{n-1}(x-x_{n-2})} - B_{n-1} e^{ik_{n-1}(x-x_{n-1})}}. \quad (6.85)$$

На границе при  $x = x_{n-1}$  этот импеданс принимает вид:

$$Z_{n-1}|_{x=x_{n-1}} = Z_{(n-1)0} \times \frac{A_{n-1} e^{-ik_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})} + B_{n-1} e^{ik_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-1})}}{A_{n-1} e^{-ik_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})} - B_{n-1} e^{ik_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-1})}}. \quad (6.86)$$

Используя обозначения (6.65), (6.66), получаем:

$$Z_{n-1} \Big|_{x=x_{n-1}} = Z_{(n-1)0} \frac{A_{n-1} e^{-ik_{n-1}d_{n-1}} + B_{n-1}}{A_{n-1} e^{-ik_{n-1}d_{n-1}} - B_{n-1}}. \quad (6.87)$$

Используя обозначение (6.79), получаем:

$$Z_{n-1} \Big|_{x=x_{n-1}} = Z_{(n-1)0} \frac{A_{n-1} e_{n-1} + B_{n-1}}{A_{n-1} e_{n-1} - B_{n-1}}. \quad (6.88)$$

### 6.3.3. Амплитуды прямой и встречной волн

Подставляя (6.75), (6.80) и (6.84), (6.88) в граничные условия (6.69), (6.70), получаем:

$$A_n + B_n e_n = A_{n-1} e_{n-1} + B_{n-1}; \quad (6.89)$$

$$Z_{n0} \frac{A_n + B_n e_n}{A_n - B_n e_n} = Z_{(n-1)0} \frac{A_{n-1} e_{n-1} + B_{n-1}}{A_{n-1} e_{n-1} - B_{n-1}}. \quad (6.90)$$

Это — система уравнений для определения  $A_{n-1}$  и  $B_{n-1}$  через  $A_n$  и  $B_n$ .

Введем вспомогательные обозначения:

$$G_U = A_n + B_n e_n; \quad (6.91)$$

$$G_Z = \frac{Z_{n0}}{Z_{(n-1)0}} \frac{A_n + B_n e_n}{A_n - B_n e_n}. \quad (6.92)$$

Подставляя эти обозначения в (6.89), (6.90), получаем:

$$G_U = A_{n-1} e_{n-1} + B_{n-1}; \quad (6.93)$$

$$G_Z = \frac{A_{n-1} e_{n-1} + B_{n-1}}{A_{n-1} e_{n-1} - B_{n-1}}. \quad (6.94)$$

Запишем эту систему относительно  $A_{n-1}$  и  $B_{n-1}$  в явном виде:

$$A_{n-1} e_{n-1} + B_{n-1} = G_U; \quad (6.95)$$

$$A_{n-1} e_{n-1} (G_Z - 1) - B_{n-1} (G_Z - 1) = 0. \quad (6.96)$$

Будем считать  $A_{n-1} e_{n-1}$  единым неизвестным и воспользуемся правилом Крамера, для чего найдем детерминанты:

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ G_Z - 1 & -(G_Z + 1) \end{vmatrix} = -2G_Z; \quad (6.97)$$

$$D_A = \begin{vmatrix} G_U & 1 \\ 0 & -(G_Z + 1) \end{vmatrix} = -G_U (G_Z + 1); \quad (6.98)$$

$$D_B = \begin{vmatrix} 1 & G_U \\ G_Z - 1 & 0 \end{vmatrix} = -G_U (G_Z - 1). \quad (6.99)$$

При этом получаем:

$$A_{n-1}e_{n-1} = \frac{D_A}{D_0} = \frac{G_U(G_Z + 1)}{2G_Z}, \quad (6.100)$$

$$B_{n-1} = \frac{D_B}{D_0} = \frac{G_U(G_Z - 1)}{2G_Z}. \quad (6.101)$$

Раскрывая параметр  $G_Z$  в соответствии с (6.92), найдем выражения в круглых скобках:

$$G_Z + 1 = \frac{A_n(Z_{n0} + Z_{(n-1)0}) + B_n(Z_{n0} - Z_{(n-1)0})e_n}{Z_{(n-1)0}(A_n - B_n e_n)}, \quad (6.102)$$

$$G_Z - 1 = \frac{A_n(Z_{n0} - Z_{(n-1)0}) + B_n(Z_{n0} + Z_{(n-1)0})e_n}{Z_{(n-1)0}(A_n - B_n e_n)}. \quad (6.103)$$

С использованием (6.91) и (6.92), найдем общий множитель выражений (6.100) и (6.101):

$$\frac{G_U}{2G_Z} = \frac{Z_{(n-1)0}}{2Z_{n0}}(A_n - B_n e_n). \quad (6.104)$$

Умножая (6.100) на  $e_{n-1}^{-1}$  и подставляя (6.102) и (6.104), а также меняя порядок слагаемых в круглых скобках, получаем:

$$A_{n-1} = \frac{A_n(Z_{(n-1)0} + Z_{n0}) - B_n(Z_{(n-1)0} - Z_{n0})e_n}{2Z_{n0}} e_{n-1}^{-1}. \quad (6.105)$$

Аналогично преобразуя (6.101) с использованием (6.103) и (6.104), получаем:

$$B_{n-1} = \frac{-A_n(Z_{(n-1)0} - Z_{n0}) + B_n(Z_{(n-1)0} + Z_{n0})e_n}{2Z_{n0}}. \quad (6.106)$$

Итак, найдены амплитуды волн в предыдущей среде  $A_{n-1}$  и  $B_{n-1}$ , выраженные через амплитуды волн в последующей среде  $A_n$  и  $B_n$ . Эти формулы (6.105) и (6.106) имеют рекуррентный характер и являются главными в задаче пересчета амплитуд.

Заметим, что формулы подобного вида несколько менее последовательным путем были получены в разделах 4.12.1 — (4.312), (4.313) и 4.12.2 — (4.320), (4.321). Провести сравнение тех и других с учетом сдвига индексов авторы предлагают в качестве полезного упражнения для любознательного читателя.

#### 6.3.4. Полная схема пересчета амплитуд

Пересчет амплитуд начинается со среды  $N$ , так что первым шагом является получение амплитуд в среде  $N - 1$ . При этом предполагается, что отражение от конца структуры отсутствует, так что амплитуда волны встречного направления в среде  $N$  равна нулю:  $B_N = 0$ . На данном этапе рассмотрения будем считать, что амплитуда волны прямого направления в среде  $N$  известна. Временно обозначим эту амплитуду



через  $A_{ND}$ . При этом амплитуды волн в среде  $N - 1$ , то есть при  $n = N$ , в соответствии с (6.105) и (6.106), принимают вид:

$$A_{N-1} = \frac{A_{ND}(Z_{(N-1)0} + Z_{N0})}{2Z_{N0}} e_{N-1}^{-1}, \quad (6.107)$$

$$B_{N-1} = -\frac{A_{ND}(Z_{(N-1)0} - Z_{N0})}{2Z_{N0}}. \quad (6.108)$$

Дальнейший шаг пересчета состоит в нахождении амплитуд волн в среде  $N - 2$ , то есть  $A_{N-2}$  и  $B_{N-2}$  с использованием амплитуд  $A_{N-1}$  и  $B_{N-1}$ , определяемых формулами (6.107) и (6.108). Этот расчет производится по формулам (6.105) и (6.106), где полагается  $n = N - 1$ .

Следующий шаг состоит в вычислении  $A_{N-3}$  и  $B_{N-3}$  с использованием  $A_{N-2}$  и  $B_{N-2}$  и так далее, вплоть до получения амплитуд в среде  $1$ , то есть  $A_1$  и  $B_1$ . В результате будут получены амплитуды  $A_{1D}$  и  $B_{1D}$ , выраженные через  $A_{ND}$ .

**Замечание.** Заметим, что полученное здесь значение  $A_{1D}$  не следует путать с амплитудой  $A_1$ , которая задается как исходный параметр задачи. Полученная же здесь величина  $A_{1D}$  найдена путем пересчета из амплитуды  $A_{ND}$ , заданной произвольно, так что в ее получении изначально заданная амплитуда  $A_1$  не участвует.

Благодаря линейности формул (6.105) и (6.106) относительно  $A_n$  и  $B_n$ , конечные выражения также останутся линейными относительно  $A_{ND}$ , так что амплитуды  $A_{1D}$  и  $B_{1D}$  можно записать в виде:

$$A_{1D} = \alpha_A A_{ND}; \quad (6.109)$$

$$B_{1D} = \alpha_B A_{ND}, \quad (6.110)$$

где  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$  — параметры, определяемые только нулевыми импедансами во всех средах, так что от каких-либо амплитуд они не зависят и просто обеспечивают линейную связь между соответствующими амплитудами. Поскольку величина  $A_{ND}$  задана, а величины  $A_{1D}$  и  $B_{1D}$  получаются путем пересчета по формулам (6.105), (6.106), то на данном этапе удобно определить эти параметры по формулам

$$\alpha_A = \frac{A_{1D}}{A_{ND}}; \quad (6.111)$$

$$\alpha_B = \frac{B_{1D}}{A_{ND}}. \quad (6.112)$$

Соотношение (6.109) дает амплитуду прямой волны в первой среде  $A_{1D}$ , которая в общем случае отличается от изначально заданной амплитуды  $A_1$ . Такое различие произошло из-за того, что в начале пересчета величина  $A_{ND}$  была задана произвольно. Для того чтобы привести найденное значение  $A_{1D}$  к заданному  $A_1$ , умножим оба урав-

нения (6.109) и (6.110) на нормировочный коэффициент  $\xi$ , то есть положим

$$A_{1D}\xi = \alpha_A A_{ND}\xi; \quad (6.113)$$

$$B_{1D}\xi = \alpha_B A_{ND}\xi. \quad (6.114)$$

При этом получаем:

$$A_1 = A_{1D}\xi; \quad (6.115)$$

$$B_1 = B_{1D}\xi; \quad (6.116)$$

$$A_N = A_{ND}\xi. \quad (6.117)$$

Нормировочный коэффициент при этом определяется из (6.115):

$$\xi = \frac{A_1}{A_{1D}}, \quad (6.118)$$

где  $A_1$  задано условиями задачи, а  $A_{1D}$  получается как результат пересчета амплитуд при задании  $A_{ND}$ .

Таким образом, после выполнения нормировки, получаем:

$$A_1 = \alpha_A A_N; \quad (6.119)$$

$$B_1 = \alpha_B A_N, \quad (6.120)$$

где

$$A_N = A_1 \frac{A_{ND}}{A_{1D}}. \quad (6.121)$$

Теперь уравнения (6.119) и (6.120) можно рассматривать как систему, в которой известны параметры  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$ , а также задана амплитуда падающей волны  $A_1$ , причем требуется определить амплитуды отраженной  $B_1$  и проходящей  $A_N$  волн. Таким образом, систему (6.119)–(6.120) надо разрешить относительно  $B_1$  и  $A_N$ .

Первое уравнение дает сразу выражение  $A_N$  через  $A_1$ , а подстановка полученного выражения во второе позволяет определить также и  $B_1$  через  $A_1$ . Таким образом, получаем для амплитуд отраженной  $B_1$  и проходящей  $A_N$  волн выражения через амплитуду падающей волны  $A_1$ :

$$B_1 = \frac{\alpha_B}{\alpha_A} A_1; \quad (6.122)$$

$$A_N = \frac{1}{\alpha_B} A_1, \quad (6.123)$$

где параметры  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$  определяются формулами (6.111) и (6.112), так что содержат только нулевые импедансы всех сред. Таким образом, полученные выражения (6.122) и (6.123) полностью определяют поставленную задачу.

**Замечание.** Явный вид параметров  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$ , хотя и может быть записан аналитически, но процедура их получения при числе сред больше трех становится крайне громоздкой и далее возрастает в геометрической прогрессии, поэтому задача для большого числа сред должна решаться машинным путем.

### 6.3.5. Схема пошагового пересчета амплитуд

Приведем схему пошагового пересчета амплитуды волны прямого направления в среде  $I$ , то есть  $A_1$  в амплитуду волны встречного направления в среде  $I$ , то есть  $B_1$ , и амплитуду волны прямого направления в среде  $N$ , то есть  $A_N$ . Представим последовательные действия по шагам в виде, удобном для формирования машинного алгоритма.

Прежде всего следует сформировать подпрограмму, рассчитывающую в соответствии с формулами (6.105) и (6.106) амплитуды волн в предыдущей среде  $A_{n-1}$  и  $B_{n-1}$  через амплитуды волн в последующей среде  $A_n$  и  $B_n$ . Входными параметрами такой подпрограммы будут нулевые импедансы предшествующей и последующей сред, то есть  $Z_{(n-1)0}$  и  $Z_{n0}$ , волновые числа и толщины предыдущей и последующей сред, то есть  $k_{n-1}$ ,  $k_n$ ,  $d_{n-1}$ ,  $d_n$ , по которым рассчитываются экспоненты  $e_n$  и  $e_{n-1}$  по формулам (6.74) и (6.79), а также амплитуды волн обоих направлений в последующей среде, то есть  $A_n$  и  $B_n$ . Выходными параметрами будут амплитуды волн обоих направлений в предыдущей среде, то есть  $A_{n-1}$  и  $B_{n-1}$ .

Дальнейшая последовательность шагов следующая.

#### Шаг № 1.

Из полной структуры выделить единичные участки и границы между ними. Задать длины участков и определить полное число участков. Для всех участков задать соответствующие волновые числа.

#### Шаг № 2

Для среды  $N$  задать амплитуду прямой волны  $A_{ND}$ . На данном этапе эта величина может быть задана произвольным образом. Также задать амплитуду встречной волны  $B_N$ , которая в любом случае должна быть равна нулю.

#### Шаг № 3.

Путем обращения к подпрограмме, использующей формулы (6.105) и (6.106), найти амплитуды волн обоих направлений в среде  $N-1$ , то есть  $A_{N-1}$  и  $B_{N-1}$ .

#### Шаг № 4.

Повторение в цикле шага № 4 с уменьшением всех индексов на единицу, вплоть до первого участка структуры с номером 1, в результате чего будут получены амплитуды  $A_{1D}$  и  $B_{1D}$ .

**Шаг № 5.**

На основе полученных амплитуд  $A_{1D}$  и  $B_{1D}$ , а также заданной на шаге № 2 амплитуды  $A_{ND}$  найти параметры  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$  по формулам (6.111) и (6.112).

**Шаг № 6.**

Используя изначально заданную амплитуду  $A_1$  и полученную путем пересчета амплитуду  $A_{1D}$ , найти нормировочный параметр  $\xi$  по формуле (6.118).

**Шаг № 7**

Используя полученные на шаге № 5 параметры  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$ , а также изначально заданную амплитуду падающей волны  $A_1$ , найти амплитуды отраженной  $B_1$  и проходящей  $A_N$  волн относительно структуры в целом по формулам (6.122) и (6.123).

**Шаг № 8.**

Вывести полученные значения амплитуд отраженной  $B_1$  и проходящей  $A_N$  волн относительно структуры в целом, а также другие необходимые данные по заданию оператора на внешний носитель.

**6.3.6. Коэффициенты отражения и прохождения**

Поскольку амплитуды отраженной  $B_1$  и проходящей  $A_N$  волн, выраженные через амплитуду падающей волны  $A_1$ , получены, то коэффициенты отражения  $R_e$  и прохождения  $T_e$  по энергиям можно записать в виде [3, стр. 67, форм. (27)]:

$$R_e = \left| \frac{B_1(A_1)}{A_1} \right|^2; \quad (6.124)$$

$$T_e = \left| \frac{A_N(A_1)}{A_1} \right|^2 \operatorname{Re} \left( \frac{k_{N0}}{k_{10}} \right). \quad (6.125)$$

При необходимости получения коэффициентов отражения и прохождения, приведенный в предыдущем разделе 6.3.5 пошаговый алгоритм получения амплитуд, вместо шага № 8 дополнен следующими двумя шагами:

**Шаг № 8.**

Используя полученные значения амплитуд  $B_1$  и  $A_1$ , а также нулевые импедансы  $k_{10}$  и  $k_{N0}$ , найти коэффициенты отражения  $R_e$  и прохождения  $T_e$  по формулам (6.124) и (6.125).

**Шаг № 9**

Вывести полученные значения амплитуд отраженной  $B_1$  и проходящей  $A_N$  волн относительно структуры в целом, а также значения коэффициентов отражения  $R_e$  и прохождения  $T_e$  и другие необходимые данные по заданию оператора на внешний носитель.

## **6.4. Сравнение пересчета импедансов с пересчетом амплитуд**

Приведенный в разделах 6.2–6.2.7 метод пересчета импедансов, в общем случае позволяют определить коэффициент отражения волны от сложной структуры. Метод пересчета амплитуд (6.3–6.3.6) позволяет определить как коэффициент отражения, так и коэффициент прохождения. Метод импедансов позволяет определить входные импедансы во всех средах структуры, а также с учетом граничных условий и выходные импедансы предшествующих сред. Метод амплитуд позволяет найти амплитуды волн обоих направлений также во всех средах структуры. С использованием формул типа (6.81)–(6.88) знание амплитуд позволяет определить также входные и выходные импедансы всех сред.

Таким образом, возможности метода амплитуд несколько шире, чем метода импедансов, однако он и является более сложным, чем метод импедансов. То есть, если исключить необходимость определения коэффициента прохождения, то конкретный выбор того или другого метода может быть определен, исходя из желания оператора и возможностей используемого вычислительного оборудования.

Главным достоинством метода пересчета импедансов является его крайняя простота, в том числе, при машинной реализации. Однако при необходимости получения наряду с коэффициентом отражения также коэффициента прохождения, следует использовать метод пересчета амплитуд.

### **Выводы по главе 6**

Данная глава посвящена подробному описанию математического аппарата метода входного и выходного импедансов для одномерной волны, распространяющейся в структуре с произвольным числом слоев. Отдельно рассмотрены пересчет импедансов и пересчет амплитуд, приведены схемы пошагового выполнения вычислений, получены коэффициенты отражения и прохождения. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Предложен алгоритм расчета отражения и прохождения одномерной волны через многослойную структуру, представленную в виде последовательно следующих друг за другом однородных слоев с различающимися параметрами. В качестве рабочего параметра различия слоев выбрано волновое число одномерной волны, распространяющейся в каждом однородном участке структуры.

2. Введено понятие обобщенного импеданса для одномерной волны, представляющего собой отношение скорости волны, распространяющейся в среде, к частоте этой волны. В случае среды, скорость волны в которой зависит от координаты, обобщенный импеданс также зависит от этой координаты.

3. На основе решения волнового уравнения в однородной среде установлено, что обобщенный импеданс выражается через частное от деления координатной функции решения волнового уравнения на производную по координате от той же координатной функции, умноженное на мнимую единицу, с обратным знаком. Введено понятие нулевого импеданса однородного участка структуры, равного обратной величине от волнового числа для этого участка. Показано, что обобщенный импеданс данного участка можно представить в виде произведения нулевого импеданса на дробь, в числителе которой приведена сумма двух частных решений волнового уравнения для этого участка, а в знаменателе — разность тех же решений.

4. Рассмотрена общая геометрия задачи, представляющая собой структуру из произвольного числа однородных слоев, разделенных границами. На основе решения волнового уравнения для каждого слоя показано, что в слое распространяются две волны — прямого и встречного направлений, а на границах между слоями выполняется равенство амплитуд волн и обобщенных импедансов.

5. Отмечено, что главной задачей настоящего рассмотрения является нахождение коэффициентов отражения и прохождения волн по энергиям относительно всей структуры в целом. В качестве решения этой задачи принят метод последовательного пересчета импедансов и амплитуд от предыдущего слоя к последующему по всей структуре в целом. В связи с этим выделены два механизма пересчета — пересчет импедансов и пересчет амплитуд.

6. Для механизма пересчета импедансов введены понятия входного и выходного импедансов для каждого слоя в отдельности. Показано, что граничное условие равенства импедансов означает равенство выходного импеданса предыдущего слоя и входного импеданса последующего. Получена формула, позволяющая выразить входной импеданс в предшествующей среде через входной импеданс в последующей для любых двух соседствующих участков структуры. Отмечено, что использование этой формулы позволяет получить входной импеданс в начальном слое структуры из входного импеданса в конечном слое структуры. Отмечено, что входной импеданс в конечном слое при отсутствии отражения от конца структуры равен нулевому импедансу в этом слое. При этом пересчет импедансов производится от конца структуры к ее началу.

7. Приведена схема пошагового пересчета импедансов, позволяющая найти как входной импеданс в каждом слое структуры по отдельности, так и полный входной импеданс структуры в целом. Отмечена возможность и приведены формулы, позволяющие получить для структуры в целом коэффициент отражения по энергиям.

8. Для механизма пересчета амплитуд получена система из двух формул, позволяющая выразить амплитуды волн прямого и встречного направлений в предыдущей среде структуры через амплитуды волн таких же направлений в предшествующей среде той же структуры.

Отмечена возможность применения полученных формул для любых двух соседствующих слоев структуры. Приведена схема пересчета амплитуд от конца структуры к ее началу, реализуемая при отсутствии отражения от конца структуры. Для пересчета необходимо предварительное задание амплитуды волны встречного направления в последней среде, которое затем нормируется на заданную изначально амплитуду волны прямого направления в первой среде структуры.

9. Приведена схема пошагового пересчета амплитуд, позволяющая из амплитуды падающей волны определить амплитуды отраженной и проходящей волн относительно структуры в целом. Отмечена возможность и приведены формулы, позволяющие получить для структуры в целом коэффициенты отражения и прохождения по энергиям.

10. Обсуждены сравнительные характеристики методов пересчета импедансов и пересчета амплитуд. Отмечено, что преимуществом метода импедансов является его простота, тогда как метод амплитуд, кроме коэффициента отражения позволяет найти также коэффициент прохождения волны по энергиям.

## Глава 7

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИМПЕДАНСА ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ БАРЬЕР

Глава посвящена применению метода обобщенного импеданса для решения практической задачи о распространении волны через многослойную структуру, содержащую один прямоугольный барьер. Рассмотрение ограничено случаем одномерной волны. Получены импедансы и амплитуды отраженной и проходящей волн, а также коэффициенты отражения и прохождения по энергии. Рассмотрены особенности распространения волны в случае барьера, имеющего комплексный характер, в том числе с отрицательной мнимой составляющей.

В главе частично использован материал работы [104]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 7.1. Геометрия задачи и основные уравнения

В рамках настоящей главы будем рассматривать распространение волн постоянной частоты через структуры, состоящие из определенного числа слоев одинаковой толщины, так что основной характеристикой каждого отдельного слоя будет волновое число. При условии заданной частоты эта характеристика будет включать в себя скорость распространения волны в данной среде в соответствии с соотношением

$$k_n = \frac{\omega}{v_n}, \quad (7.1)$$

где  $n$  — номер слоя, а  $v_n$  — скорость волны в этом слое.

В качестве первичной задачи рассмотрим падение волны на «прямоугольный» барьер, то есть такой, в котором волновое число на протяжении барьера сохраняется постоянным, а вне барьера находятся среды, волновые числа в которых также сохраняются постоянными, но отличными от волнового числа внутри барьера. То есть распределение волновых чисел по длине структуры можно представить в виде прямоугольного «импульса» с резкими «фронтами», по обе стороны от которого волновые числа сохраняются постоянными.

Следуя материалу главы 6 и работе [104], приведем здесь вкратце начальные данные и основной математический аппарат, используемый для решения поставленной задачи.



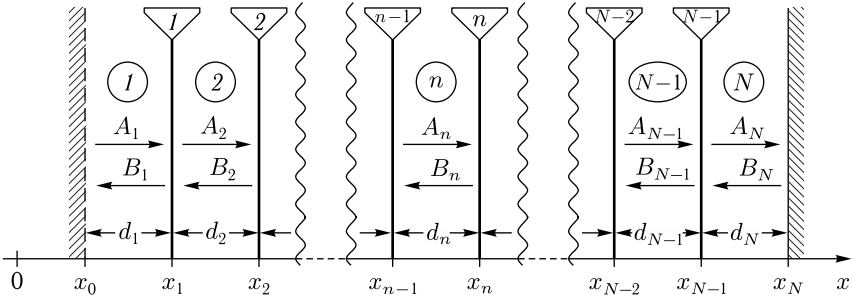


Рис. 7.1. Общая геометрия задачи. Цифры в кругах — номера сред, цифры в треугольниках — номера границ

Общая геометрия рассматриваемой многослойной структуры, совпадающая с приведенной в главе 6 (рис. 6.1), показана на рис. 7.1.

Структура содержит  $N$  плоскопараллельных однородных слоев, разделенных  $N - 1$  границами. Ось координат  $Ox$  ориентирована перпендикулярно плоскостям слоев. Начало структуры соответствует  $x = x_0$ , конец —  $x = x_N$ . Толщины слоев равны:

$$d_n = x_n - x_{n-1}. \quad (7.2)$$

В каждом слое распространяются две волны: волна прямого направления  $A_n$  и волна встречного направления  $B_n$ . На крайних границах структуры при  $x = x_0$  и  $x = x_N$  отражение волн отсутствует.

В структуру со стороны среды 1 входит прямая волна с амплитудой  $A_1$ . В той же среде распространяется отраженная волна  $B_1$ . В среде  $N$  распространяется только волна прямого направления  $A_N$ , а волна встречного направления  $B_N$  отсутствует, то есть  $B_N = 0$ .

В структуре распространяются гармонические волны, координатная составляющая которых определяется волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + k_n^2 U_n = 0, \quad (7.3)$$

решение которого имеет вид:

$$U_n = A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}. \quad (7.4)$$

В этом выражении первое слагаемое определяет волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $Ox$ , а второе — в отрицательном направлении той же оси.

Волновые числа  $k_n$  во всех средах структуры предполагаются известными. Нулевые импедансы сред соответственно равны:

$$Z_{n0} = \frac{1}{k_n}. \quad (7.5)$$

Обобщенные импедансы в тех же средах равны:

$$Z_n = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}}{A_n e^{-ik_n x} - B_n e^{ik_n x}}. \quad (7.6)$$

При расчете будем пользоваться полученными в работе [103] рекуррентными формулами, позволяющими выполнить пересчет параметров структуры от конца к ее началу.

Формула для пересчета импедансов, подобная (6.54), имеет вид:

$$Z_n^{(\text{in})} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(\text{in})}) e^{ik_n d_n} - (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(\text{in})}) e^{-ik_n d_n}}{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(\text{in})}) e^{ik_n d_n} + (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(\text{in})}) e^{-ik_n d_n}}. \quad (7.7)$$

где  $Z_n^{(\text{in})}$  — входной импеданс соответствующего слоя структуры.

Формулы для пересчета амплитуд, подобные (6.105) и (6.106), имеют вид:

$$A_{n-1} = \frac{A_n Z_{(n-1)0} + Z_{n0} - B_n (Z_{(n-1)0} - Z_{n0}) e^{-ik_n d_n}}{2Z_{n0}} e^{ik_{n-1} d_{n-1}}; \quad (7.8)$$

$$B_{n-1} = \frac{-A_n (Z_{(n-1)0} - Z_{n0}) + B_n (Z_{(n-1)0} + Z_{n0}) e^{-ik_n d_n}}{2Z_{n0}}. \quad (7.9)$$

Коэффициент отражения при пересчете импедансов будем определять по формуле (6.64):

$$R_e = \left| \frac{Z_{10} - Z_2^{(\text{in})}}{Z_{10} + Z_2^{(\text{in})}} \right|. \quad (7.10)$$

Коэффициенты отражения и прохождения при пересчете амплитуд будем определять по формулам (6.124) и (6.125):

$$R_e = \left| \frac{B_1(A_1)}{A_1} \right|^2; \quad (7.11)$$

$$T_e = \left| \frac{A_N(A_1)}{A_1} \right|^2 \text{Re} \left( \frac{k_{N0}}{k_{10}} \right). \quad (7.12)$$

Кроме коэффициентов отражения и прохождения будем рассматривать также коэффициент поглощения, в соответствии с законом сохранения энергии, имеющий вид [127–129]:

$$A_e = 1 - R_e - T_e. \quad (7.13)$$

## 7.2. Единичный барьер

Рассмотрим сначала наиболее простую задачу. Предположим, что параметры составляющих структуру сред все одинаковы, кроме одной, параметры которой отличаются. Такую среду или слой с отличными от других параметрами будем называть «единичным барьером». Если волновое число единичного барьера больше волновых чисел остальных

слоев структуры, то такой барьер будем называть положительным, если меньше — отрицательным. Если волновое число барьера действительное, будем называть такой барьер действительным, если мнимое — мнимым, если комплексное, то есть имеет отличные от нуля действительную и мнимую части — комплексным. Будем перемещать барьер по структуре и следить за импедансами, амплитудами волн и коэффициентами отражения и прохождения относительно структуры в целом. Из всего многообразия перечисленных задач выберем только наиболее характерные, которые рассмотрим по отдельности. Задачи для импедансов, амплитуд отраженных волн и коэффициентов отражения будем решать методом пересчета импеданса. Для получения коэффициентов прохождения и поглощения используем метод пересчета амплитуд. В качестве базовой рассмотрим структуру, состоящую из 16 сред.

### 7.3. Действительный отрицательный барьер

Начнем рассмотрение с перемещения по структуре действительного отрицательного барьера. Обратимся к рис. 7.2, где приведены эпюры различных параметров барьера и соответствующих входных импедансов.

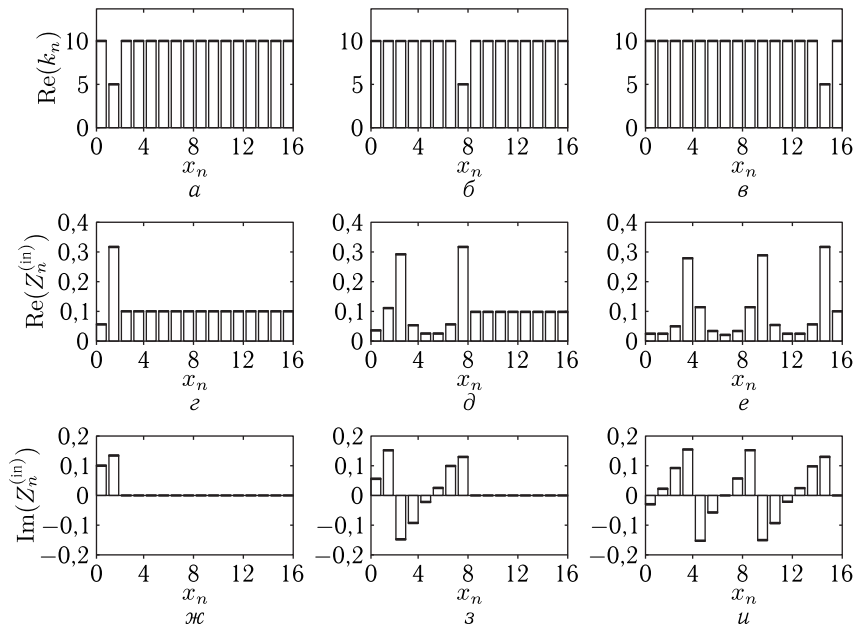


Рис. 7.2. Перемещение по структуре действительного отрицательного барьера: а, б, в — положения барьера; г, д, е — действительные части входных импедансов слоев структуры; ж, з, и — мнимые части тех же импедансов

Каждый столбец рисунка (*а-г-ж*, *б-д-з*, *в-е-и*) соответствует отдельному положению барьера, приведенного в верхней эпюре столбца (*а*, *б* или *в*). Строки рисунка соответствуют различным положениям барьера (*а*, *б*, *в*) и соответствующим действительной (*г-д-е*) и мнимой (*ж-з-и*) частям входного импеданса различных сред структуры.

Волновые числа во всех средах структуры, кроме барьера, равны 10 отн. ед., волновое число среды барьера равно 5 отн. ед.

Рассмотрим три положения барьера в структуре: вблизи ее начала — в среде 2 (рис. 7.2, *а*), вблизи ее середины — в среде 8 (рис. 7.2, *б*) и вблизи конца — в среде 15 (рис. 7.2, *в*).

Из рис. 7.2, *г*, рис. 7.2, *д*, рис. 7.2, *е*, а также рис. 7.2, *ж*, рис. 7.2, *з*, рис. 7.2, *и*, можно видеть, что заметное изменение действительных и мнимых частей входных импедансов имеет место только в средах, координаты  $x_n$  которых меньше координаты, соответствующей месту положения барьера, то есть по рисунку — левее. Такая неизменность входного импеданса правее положения барьера происходит из-за того, что пересчет импеданса совершается от конца структуры, то есть от  $x_n = 16$  отн. ед. и до того, как очередь дойдет до барьера, пересчет о существовании барьера просто «не знает». Только после того как пересчет доходит до положения барьера, импеданс начинает меняться. Примечательно, что хотя барьер является полностью действительным, импеданс имеет как действительную, так и мнимую части.

### 7.3.1. Аналитическое моделирование периодичности наблюдаемых зависимостей

Из рис. 7.2, *е* и рис. 7.2, *и* следует, что зависимости обеих частей входных импедансов от координаты имеют характер, близкий к периодическому. Проверка показала, что периодичность в основном свойственна и другим подобным зависимостям, однако при изменении параметров структуры кривые меняются весьма сложным образом. Были выполнены вариации трех параметров: полной длины структуры, высоты барьера и его длины. Наиболее сильно на характер зависимостей влияет изменение полной длины структуры. Так, увеличение этой длины всего на 2%, то есть, если вместо 16 отн. ед. взять длину равной 16,3 отн. ед., то вместо трех пиков получаются четыре или даже пять, причем сильно изломанного характера. То же касается уменьшения длины с 16 отн. ед. до 15,7 отн. ед. Более сильные вариации длины структуры приводят к еще более серьезному изменению зависимостей, вплоть до нарушения четкой периодичности. Высота барьера меньше влияет на характер зависимостей, однако тоже достаточно сильно. Так, изменение высоты барьера в обе стороны в два-три раза приводит к изменению периода тоже до двух раз, то есть вместо трех пиков появляются два или четыре. Меньше всего сказывается изменение длины барьера, однако влияние все же остается довольно сильным. Так, при увеличении длины барьера в четыре-пять раз вместо трех пиков на зависимостях остаются всего два. В общем случае характер изменения

зависимостей от всех перечисленных параметров весьма сложен и требует отдельного исследования. В этом случае, по-видимому, более четкие результаты можно получить, если рассматривать структуру из большего чем 16 числа слоев, например из 32 или еще больше, что позволит проследить периодичность более подробно. Авторы оставляют такое исследование в качестве отдельной задачи, а здесь ограничиваются далее аналитическим моделированием наблюдаемых зависимостей в рамках эмпирических формул.

Так, из рис. 7.2, *e* и рис. 7.2, *u* четко видно, что приведенные зависимости должны элементарным образом описываться тригонометрическими функциями. Однако прямое использование рекуррентной формулы (7.7) приводит к неимоверно громоздким вычислениям, поэтому приведем здесь упрощенное модельное представление, вытекающее из структуры этой формулы.

Так, упомянутая рекуррентная формула (7.7) для входного импеданса имеет вид:

$$Z_n^{(in)} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(in)})e^{ik_n d_n} - (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(in)})e^{-ik_n d_n}}{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(in)})e^{ik_n d_n} + (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(in)})e^{-ik_n d_n}}. \quad (7.14)$$

Заменяя экспоненты тригонометрическими функциями в соответствии с формулой Эйлера [123, стр. 76, форм. (408.04)], после приведения в числителе и знаменателе подобных членов, получаем:

$$Z_n^{(in)} = Z_{n0} \frac{Z_{n+1}^{(in)} \cos(k_n d_n) + iZ_{n0} \sin(k_n d_n)}{Z_{n0} \cos(k_n d_n) + iZ_{n+1}^{(in)} \sin(k_n d_n)}. \quad (7.15)$$

Умножая числитель и знаменатель на выражение, комплексно сопряженное к знаменателю, после чего выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\operatorname{Re}(Z_n^{(in)}) = Z_{n0} \frac{Z_{n+1}^{(in)} Z_{n0}}{(Z_{n+1}^{(in)})^2 + (Z_{n0}^2 - (Z_{n+1}^{(in)})^2) \cos^2(k_n d_n)}; \quad (7.16)$$

$$\operatorname{Im}(Z_n^{(in)}) = Z_{n0} \frac{(Z_{n0}^2 - (Z_{n+1}^{(in)})^2) \sin(k_n d_n) \cos(k_n d_n)}{(Z_{n+1}^{(in)})^2 + (Z_{n0}^2 - (Z_{n+1}^{(in)})^2) \cos^2(k_n d_n)}. \quad (7.17)$$

Из структуры полученных формул видно, что в первой из них периодическую зависимость от номера  $n$  (что эквивалентно зависимости от  $x_n$  на рис. 7.2) обеспечивает квадрат косинуса в знаменателе, а во второй к этой зависимости еще добавляется произведение синуса на косинус в числителе. С условием сохранения структуры, введем модельные формулы:

$$u = \frac{1}{0,05 + \cos^2 x}; \quad (7.18)$$

$$v = \frac{3 \sin x \cos x}{0,05 + \cos^2 x}. \quad (7.19)$$

В этих формулах числовые параметры 0,05 и 3 введены для наглядности масштабирования.

Модельные зависимости, отражающие структуру формул (7.18) и (7.19), показаны на рис. 7.3.

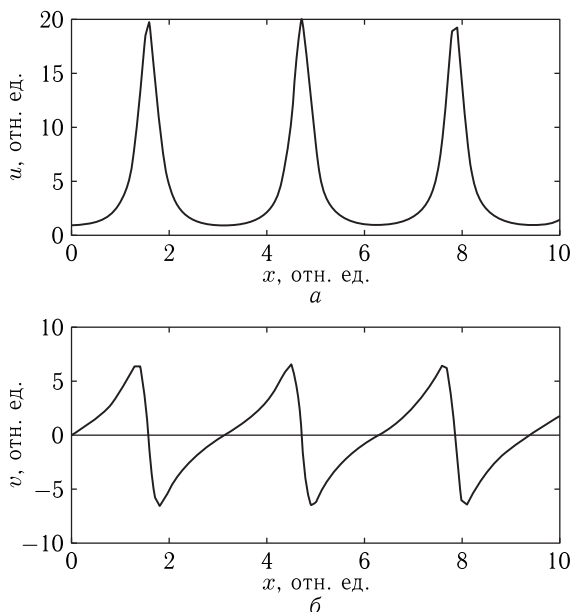


Рис. 7.3. Модельные зависимости, построенные по формулам (7.18) — *а* и (7.19) — *б*

Из рис. 7.3, *а* видно, что кривая  $u(x)$  с точностью до замены гистограммы на плавную кривую, имеет ту же структуру, что гистограмма на рис. 7.2, *е*, а кривая на рис. 7.3, *б* имеет ту же структуру, что гистограмма на рис. 7.2, *и*.

Таким образом, предложенная модель с качественной стороны в достаточной степени отражает характер зависимостей действительной и мнимой частей входного импеданса от координаты многослойной структуры, представленных на рис. 7.2, *е* и рис. 7.2, *и*. Приведенные здесь зависимости (7.18) и (7.19) будем считать базовыми и на их основе обратимся к интерпретации реальных зависимостей.

На рис. 7.4 приведены зависимости действительной (*а*) и мнимой (*б*) частей входных импедансов сред от координаты вдоль структуры. Точки соответствуют рис. 7.2, *е* и рис. 7.2, *и*.

Кривая на рис. 7.4, *а* построена по формуле

$$\operatorname{Re}(Z^{(\text{in})}) = \frac{0,02}{0,05 + \left\{ \cos [0,54(x_n - 0,6)] \right\}^2}. \quad (7.20)$$

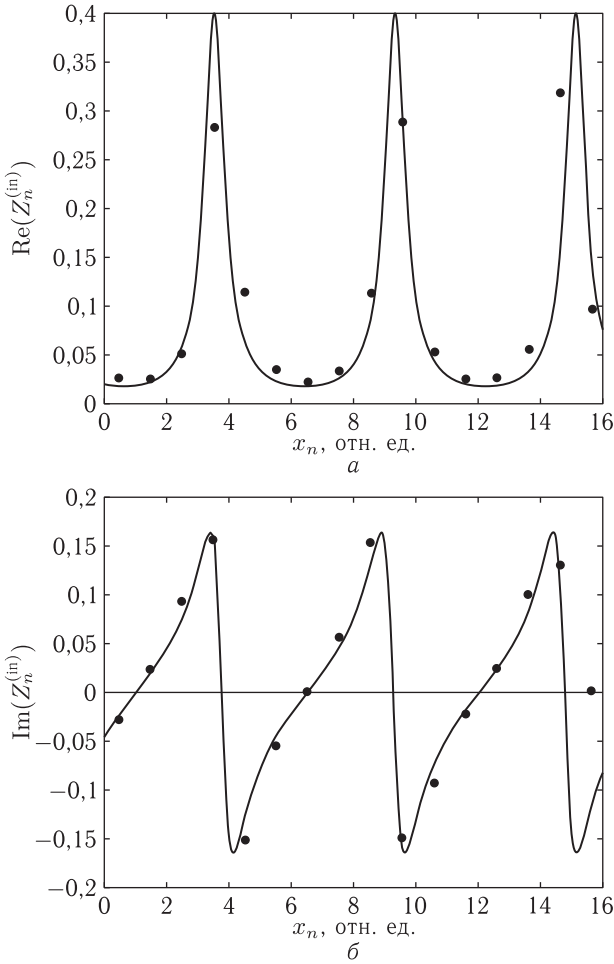


Рис. 7.4. Зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей входных импедансов сред от координаты вдоль структуры. Точки — результаты машинного эксперимента, соответствующие вершинам столбцов гистограмм на рис. 7.2, е (а) и рис. 7.2, и (б). Кривые построены по формулам: а — (7.20), б — (7.21)

Кривая на рис. 7.4, б построена по формуле

$$\text{Im}(Z^{(in)}) = \frac{0,075 \sin [0,57(x_n - 1)] \cos [0,57(x_n - 1)]}{0,05 + \left\{ \cos [0,57(x_n - 1)] \right\}^2}. \quad (7.21)$$

Обе формулы с точностью до числовых параметров повторяют структуру формул (7.18) и (7.19).

Из рисунка видно, что обе кривые соответствуют точкам с точностью порядка 10%.

**Замечание.** Формулы подобраны, исходя из наилучшего совпадения кривых с точками. Некоторое различие знаменателей обусловлено недостаточной точностью построения точек из-за ступенчатого характера изменения координаты  $x_n$ .

### 7.3.2. Изменение волнового числа

Все приведенные на рис. 7.2 зависимости построены при единственном образом заданном значении волнового числа. Так, волновые числа во всех средах структуры, кроме барьера, равны 10 отн. ед., волновое число среды барьера равно 5 отн. ед.

Из рис. 7.2, д, рис. 7.2, з и особенно рис. 7.2, е, рис. 7.2, и видно, что изменение обеих частей импеданса происходит периодическим образом. Однако периодичность подобных зависимостей не является безусловной и меняется при изменении волнового числа. Из всего многообразия можно уверенно выделить три различных режима зависимости импеданса от координаты. Наиболее характерные случаи представлены на рис. 7.5.

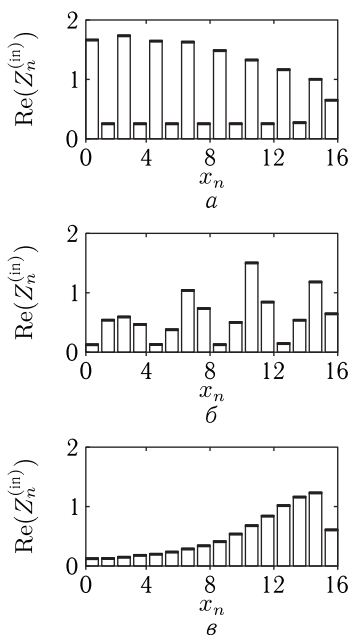


Рис. 7.5. Зависимости действительной части входного импеданса от координаты при различных значениях волнового числа: а —  $k = 1,6$  отн. ед., (режим № 1); б —  $k = 2,4$  отн. ед. (режим № 2); в —  $k = 3,2$  отн. ед. (режим № 3). Остальные параметры — те же, что на рис. 7.2



Приведем краткие характеристики этих режимов.

Режим №1 — четкая периодичность. Этот режим, показанный на рис. 7.5, а, имеет четко выраженную периодичность с периодом 2 отн. ед. Он наступает в тех случаях, когда волновое число кратно произведению 1,6 отн. ед. на нечетное число, то есть при  $k = 1,6 \times (2n - 1)$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — целое число. При отклонении от этих значений в ту или иную сторону на величину более  $\pm 0,10$  отн. ед. этот режим сменяется режимом №2.

Режим №2 — нарушенная периодичность. Этот режим, показан на рис. 7.5, б. Он имеет место при отклонении волнового числа от значений, свойственных режиму №1, на величину до  $\pm 0,7$  отн. ед.

Режим №3 — монотонный рост. Этот режим показан на рис. 7.5, в. Он имеет место в случаях, когда волновое число кратно произведению 1,6 отн. ед. на четное число, то есть при  $k = 1,6 \cdot 2n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — целое число. При отклонении от этих значений в ту или иную сторону на величину более  $\pm 0,10$  отн. ед. этот режим сменяется режимом №2.

В приведенных выше формулах фигурирует одно и то же волновое число  $k = 1,6$  отн. ед, которое можно считать «базовым». Это волновое число соответствует длине волны  $\lambda = 2\pi/k \approx 4$  отн. ед., а период зависимости, приведенной на рис. 7.5, а, равен 2 отн. ед. То есть базовое волновое число соответствует случаю, когда период зависимости равен половине длины волны. В данном случае все слои структуры имеют длину, равную 1 отн. ед. То есть волновое число  $k = 1,6$  отн. ед соответствует укладыванию половины длины волны на длине (толщине) двух слоев структуры. Можно полагать, что при одновременном изменении толщины всех слоев структуры это число будет меняться в соответствующей пропорции.

### 7.3.3. Периодичность смены режимов

При монотонном увеличении волнового числа в одинаковой пропорции во всех средах режимы сменяют друг друга периодическим образом в последовательности: 1-2-3-2-1-2-3-2-1 и так далее.

Для определенности введем базовое распределение волнового числа по координате. Будем полагать, что базовые значения волновых чисел во всех средах, кроме №15, одинаковые и равны  $k_{1-14,16}^{(0)} = 1,0$  отн. ед., а в среде №15 волновое число равно  $k_{15}^{(0)} = 0,5$  отн. ед. Исследуемые значения волновых чисел равны произведению базовых значений на нормировочные коэффициенты  $G_k$  единые для всей группы волновых чисел данного номера  $n$ , то есть

$$k_n = k_n^{(0)} G_k, \quad (7.22)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — порядковый номер среды.

Характер зависимости действительной части входного импеданса от координаты при изменении нормировочного коэффициента волнового числа иллюстрируется рис. 7.6.

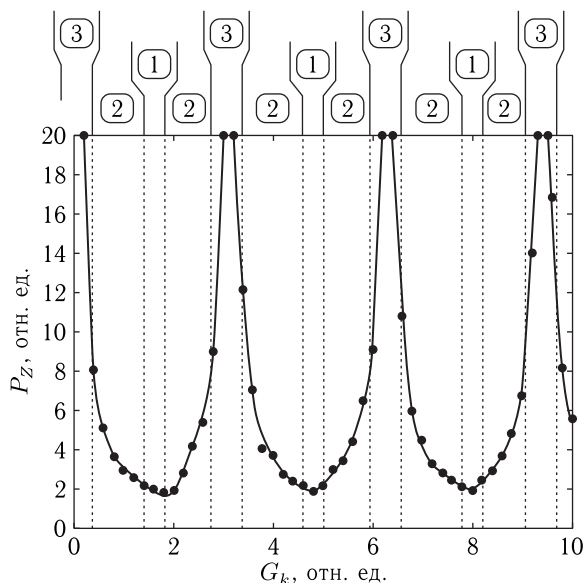


Рис. 7.6. Изменение периода зависимости действительной части входного импеданса от координаты при изменении нормировочного коэффициента волнового числа. Вверху цифры в кругах — номера режимов. Точки — результаты машинного эксперимента

Из рисунка можно видеть, что период рассматриваемой зависимости меняется циклическим образом, причем режимы (номера сверху рисунка) сменяют друг друга в указанной выше последовательности.

Примечательно отметить, что приведенная на рис. 7.6 зависимость может быть моделирована такой же формулой, что (7.18), где в знаменателе присутствует квадрат косинуса с постоянным слагаемым, однако теперь в качестве переменной выступает нормировочный коэффициент волнового числа, а вместо косинуса используется синус. Возможность такого моделирования представлена на рис. 7.7, где точки — соответствуют тем же точкам, что на рис. 7.6, а сплошная линия построена по формуле

$$P_Z = \frac{0,9}{0,05 + \sin^2 G_k} + 1,5; \quad (7.23)$$

Видно, что эта формула совпадает с (7.18) с точностью замены косинуса на синус и введения небольшого сдвига по вертикальной оси.

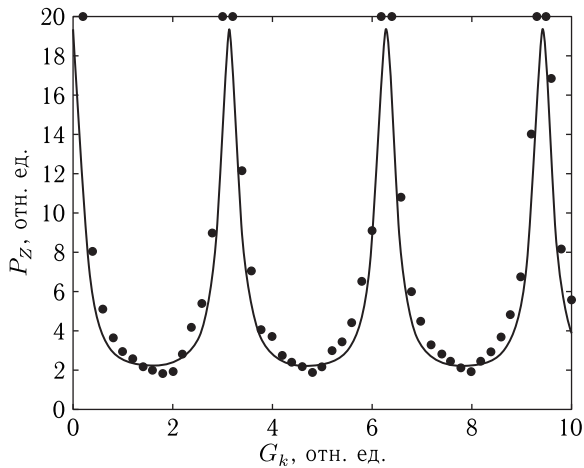


Рис. 7.7. Модельное представление той же зависимости, что на рис. 7.6. Точки — результаты машинного эксперимента. Сплошная линия — расчет по формуле (7.23)

Коэффициент 0,9 в числителе введен для того, чтобы согласовать масштаб по вертикальной оси с рис. 7.6.

Из рисунка видно, что модельное представление соответствует непосредственно измеренным точкам с точностью порядка 10%.

#### 7.4. Действительный положительный барьер

В предыдущих разделах исследовано влияние действительного отрицательного барьера на распределение входных импедансов сред. Рассмотрим теперь влияние на то же распределение действительного положительного барьера. Проверка показывает, что перемещение положительного барьера по длине структуры оказывает на распределение импедансов влияние, аналогичное перемещению отрицательного. Отличие состоит только в некотором изменении амплитуды и сдвиге по длине структуры распределения как целого. Поэтому здесь подробно на этом не будем останавливаться, а сразу установим положительный барьер в наиболее удаленном слое структуры, то есть при координате  $x_n = 15$  отн. ед. и рассмотрим изменение его высоты.

Обратимся к рис. 7.8, где приведены эпюры различных параметров барьера и соответствующих входных импедансов. Каждый столбец рисунка (*а-г-ж*, *б-д-з*, *в-е-и*) относится к отдельной высоте барьера, приведенного в верхней эпюре столбца (*а*, *б* или *в*). Строки рисунка соответствуют различным значениям высоты барьера (*а*, *б*, *в*) и соответствующим действительной (*г-д-е*) и мнимой (*ж-з-и*) частям входного импеданса различных сред структуры.

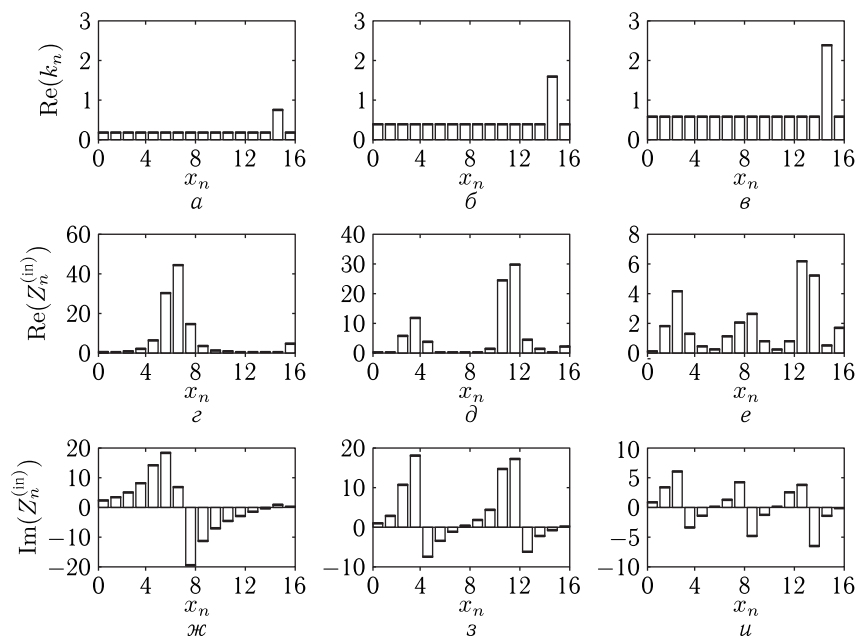


Рис. 7.8. Изменение высоты действительного положительного барьера: *а, б, в* — высота барьера и остальных слоев структуры; *г, д, е* — действительные части входных импедансов слоев структуры; *ж, з, и* — мнимые части тех же импедансов. В случаях *а, г, ж* волновые числа во всех средах структуры, кроме барьера, равны  $-0,2$  отн. ед., волновое число барьера —  $0,8$  отн. ед.; в случаях *б, д, з* те же величины равны  $0,4$  отн. ед. и  $1,6$  отн. ед.; в случаях *в, е, и* —  $0,6$  отн. ед. и  $2,4$  отн. ед.

Как и в случае отрицательного барьера (раздел 7.3) будем менять не только высоту самого барьера, то есть его волновое число, но и одновременно в такой же пропорции — волновые числа во всех остальных средах структуры.

Из рисунка видно, что характер зависимостей здесь существенно отличается от приведенных на рис. 7.2, поэтому рассмотрим их более подробно.

#### 7.4.1. Периодичность импеданса при изменении волнового числа

Из рис. 7.8 можно видеть, что положительный барьер приводит к периодической зависимости входных импедансов сред от координаты  $x_n$ . В то же время, при увеличении высоты барьера период зависимости входного импеданса от координаты уменьшается (это видно при переходе от левого столбца через средний к правому).

Подобно принятому в разделе 7.3.3, введем базовое распределение волнового числа по координате. Будем полагать, что базовые значения волновых чисел во всех средах, кроме № 15 одинаковые

и равны  $k_{1-14,16}^{(0)} = 1,0$  отн. ед., а в среде № 15 волновое число равно  $k_{15}^{(0)} = 4,0$  отн. ед. Исследуемые значения волновых чисел равны произведению базовых значений на нормировочные коэффициенты  $G_k$  единые для всей группы волновых чисел данного номера  $n$ , то есть

$$k_n = k_n^{(0)} G_k, \quad (7.24)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — порядковый номер среды.

На рис. 7.9 приведена зависимость периода осцилляций действительной части входного импеданса от нормировочного коэффициента волнового числа.

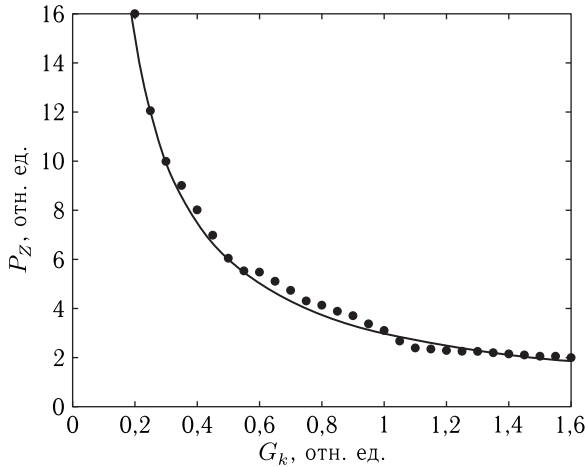


Рис. 7.9. Зависимость периода осцилляций действительной части входного импеданса от нормировочного коэффициента волнового числа. Точки — результаты машинного эксперимента. Сплошная линия — расчет по формуле (7.25)

Из рисунка можно видеть, что точки, полученные из зависимостей типа приведенных в нижних рядах эюр на рис. 7.8, с точностью порядка 10% хорошо описываются кривой, построенной по закону обратной пропорциональности, в соответствии с формулой

$$P_Z = \frac{3}{G_k}. \quad (7.25)$$

Дальнейшее увеличение параметра  $G_k$  приводит к колебаниям значения периода в пределах 1,0–2,0 отн. ед., причем какая-либо тенденция к периодичности, подобная показанной на рис. 7.6, здесь отсутствует.

#### 7.4.2. Периодичность импеданса при изменении координаты

Рассмотрим теперь сам факт периодичности, для чего обратимся к интерпретации зависимостей, соответствующих максимальному из принятых значений волнового числа, приведенных на рис. 7.8, e

и рис. 7.8 *и*. При этом волновые числа во всех средах структуры, кроме барьера, равны  $-0,6$  отн. ед., волновое число барьера  $-2,4$  отн. ед. (рис. 7.8, *в*).

На рис. 7.10 приведены зависимости действительной (*а*) и мнимой (*б*) частей входных импедансов сред от координаты вдоль структуры. Точки соответствуют рис. 7.8, *е* и рис. 7.8, *и*.

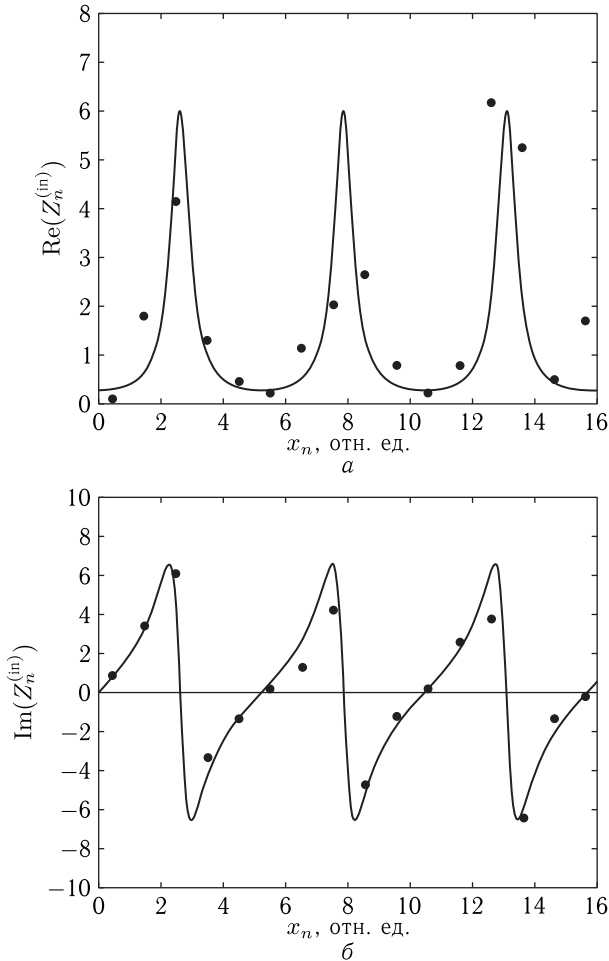


Рис. 7.10. Зависимости действительной (*а*) и мнимой (*б*) частей входных импедансов сред от координаты вдоль структуры. Точки — результаты машинного эксперимента, соответствующие вершинам столбцов гистограмм на рис. 7.8, *е* (*а*) и рис. 7.8, *и* (*б*). Кривые построены по формулам: *а* — (7.26), *б* — (7.27)

Кривая на рис. 7.10, а построена по формуле

$$\operatorname{Re}(Z^{(\text{in})}) = \frac{0,30}{0,05 + [\cos(0,60x_n)]^2}. \quad (7.26)$$

Кривая на рис. 7.10, б построена по формуле

$$\operatorname{Im}(Z^{(\text{in})}) = \frac{3,0 \sin(0,60x_n) \cos(0,60x_n)}{0,05 + [\cos(0,60x_n)]^2}. \quad (7.27)$$

Из рисунка видно, что обе кривые соответствуют точкам с точностью порядка 20%. В отличие от рис. 7.4, здесь знаменатели в обеих формулах (7.26) и (7.27) совпадают, то есть недостаточная точность измерения периода заметного влияния не оказывает.

**Замечание.** Приведенные на рис. 7.10 зависимости соответствуют значению нормировочного коэффициента  $G_k = 0,6$  отн. ед, что, согласно рис. 7.9, дает период (то есть изменение фазы квадрата косинуса на  $\pi$ )  $P_Z = 5,5$  отн. ед. При этом коэффициент при  $x_n$  должен равняться 0,57, тогда как наилучшее совпадение получается при 0,60. Такое расхождение, около 5%, опять-таки отражает недостаточную точность измерения периода вследствие дискретного характера изменения координаты.

## 7.5. Коэффициент отражения

В предыдущих разделах основное внимание уделялось характеру поведения входного импеданса при изменении параметров барьера. Однако для практики весьма важной характеристикой является способность структуры отражать падающее на нее излучение, измеряемая коэффициентом отражения. Обратимся теперь к рассмотрению этого коэффициента при вариации параметров структуры.

Сначала рассмотрим перемещение единичного барьера по длине структуры. Будем рассматривать два случая: первый, когда барьер отрицательный, и второй, когда барьер положительный. В качестве базового уровня волнового числа во всех средах, кроме барьера, примем 1,0 отн. ед. Волновое число среды отрицательного барьера положим равным 0,5 отн. ед., то есть в два раза меньше базового, а волновое число среды положительного барьера — 2,0 отн. ед, то есть в два раза больше базового. Будем перемещать барьер по координате в пределах всей структуры, то есть от  $x = 1$  отн. ед до  $x = 16$  отн. ед. и следить за амплитудой  $B_1$  (ее действительной и мнимой частями, а также модулем) и фазой  $\theta_1$  отраженной волны, а также коэффициентом отражения  $R$ , определяемым по формуле (7.11).

Полученные результаты представлены на рис. 7.11 для отрицательного (левый столбец) и положительного (правый столбец) барьеров.

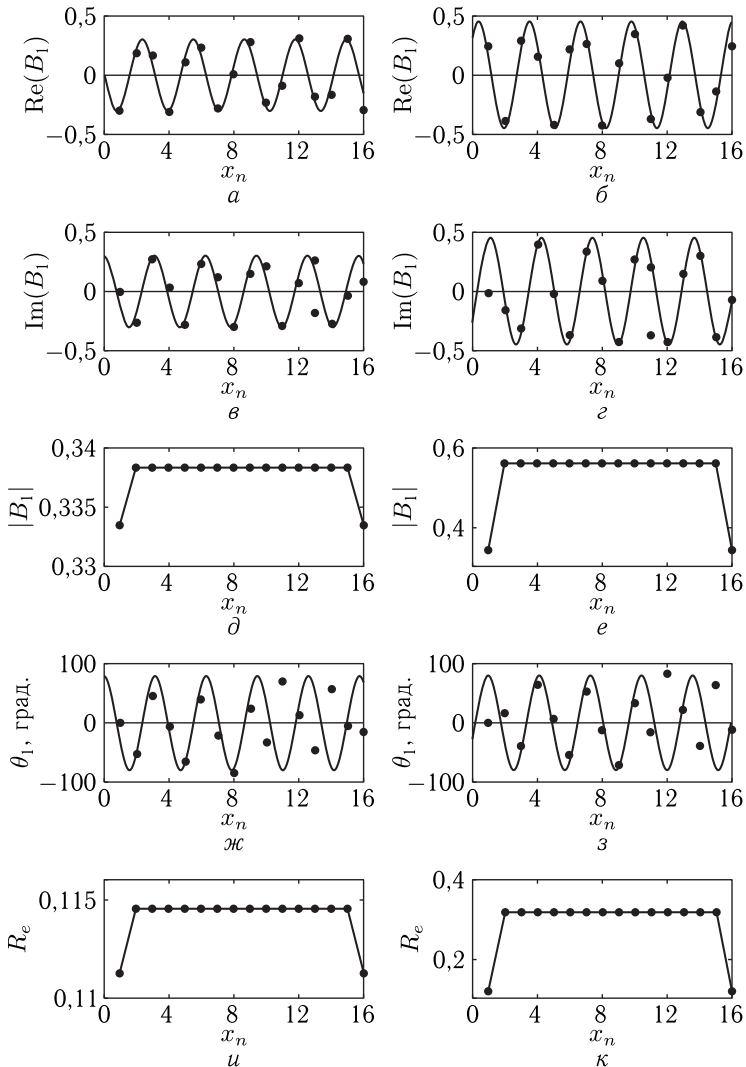


Рис. 7.11. Зависимости действительной (а, б) и мнимой (в, г) частей амплитуды отраженной волны, модуля такой амплитуды (д, е), фазы отраженной волны (ж, з) и коэффициента отражения (и, к) от координаты расположения барьера по длине структуры. Левый столбец (а, в, д, ж, и) — барьер отрицательный, правый столбец (б, г, е, з, к) — барьер положительный. Волновые числа во всех средах структуры, кроме барьера — 1,0 отн.ед., в среде отрицательного барьера — 0,5 отн.ед., в среде положительного барьера — 2,0 отн.ед. Точки — результаты машинного эксперимента. Кривые построены по формулам (7.28)–(7.39)



Точки на рисунке — результаты машинного эксперимента. Сплошные кривые построены по следующим формулам

для отрицательного барьера

$$a - \operatorname{Re}(B_1) = -0,30 \sin(2x_n); \quad (7.28)$$

$$в - \operatorname{Im}(B_1) = 0,30 \cos(2x_n); \quad (7.29)$$

$$\partial - |B_1| = 0,3384 \text{ (крайние значения — 0,3333)}; \quad (7.30)$$

$$ж - \theta_1 = 0,40 \cos(2x); \quad (7.31)$$

$$и - R_e = 0,1145 \text{ (крайние значения — 0,1111)}; \quad (7.32)$$

для положительного барьера

$$б - \operatorname{Re}(B_1) = -0,45 \cos[2(x_n - 0,30)]; \quad (7.33)$$

$$з - \operatorname{Im}(B_1) = 0,40 \sin[2(x_n - 0,20)]; \quad (7.34)$$

$$е - |B_1| = 0,5634 \text{ (крайние значения — 0,3333)}; \quad (7.35)$$

$$з - \theta_1 = 0,40 \sin[2(x_n - 0,20)]; \quad (7.36)$$

$$к - R_e = 0,3174 \text{ (крайние значения — 0,3333)}. \quad (7.37)$$

Величины  $|B_1|$  и  $\theta_1$  определяются по стандартным формулам [122, стр. 32, форм. (1.3.4)]:

$$|B_1| = \sqrt{[\operatorname{Re}(B_1)]^2 + [\operatorname{Im}(B_1)]^2}; \quad (7.38)$$

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(B_1)}{\operatorname{Re}(B_1)}. \quad (7.39)$$

Из рисунка можно видеть, что зависимости действительной и мнимой частей амплитуды отраженной волны с точностью порядка 10% описываются синусоидами, причем зависимости для отрицательного и положительного барьеров находятся в противофазе. Модуль амплитуды отраженной волны, кроме расположения барьера на концах структуры, от координаты барьера не зависит (сохраняется постоянным). Фазы отраженной волны при  $x_n \leq 10$  отн. ед. также описываются синусоидами, противофазными для отрицательного и положительного барьеров, а при превышении  $x_n$  величины 10 отн. ед., меняются на противоположные, что означает превышение фазы сверх истинного уровня на  $180^\circ$ . То есть, например, на рис. 7.11, ж при  $x_n = 11$  отн. ед. точка соответствует значению  $90^\circ$ , что означает, что фаза равна  $90^\circ - 180^\circ = -90^\circ$ . То же касается остальных точек при  $x_n > 10$  отн. ед. Коэффициент отражения, получаемый из модуля амплитуды отраженной волны, кроме расположения барьера на концах структуры, от координаты барьера также не зависит (сохраняется постоянным). Легко видеть, что значения коэффициента отражения равны квадрату модуля амплитуды отраженной волны, как это следует из формулы (7.11) при  $A_1 = 1,0$  отн. ед. Отклонение модуля отраженной волны и коэффициента отражения на краях структуры от значений, соответствующих

расположению барьера внутри структуры, обусловлено несимметричностью граничных условий в первом и последнем слоях структуры.

Таким образом, главным результатом проделанного рассмотрения можно считать независимость модуля амплитуды отраженной волны и коэффициента отражения от положения барьера, кроме концов структуры. Эта независимость сохраняется, несмотря на то, что действительная и мнимая части амплитуды, а также фаза отраженной волны при сдвиге барьера меняются синусоидальным образом.

### 7.5.1. Изменение высоты барьера

Рассмотрим теперь, как ведет себя отраженная волна при изменении высоты барьера. Поскольку коэффициент отражения не зависит от положения барьера (кроме первого и последнего слоев), зададим положение барьера в предпоследнем слое структуры, для которого  $x_n = 15$  отн. ед. Базовой уровень волновых чисел во всех средах структуры, кроме среды барьера, положим равным  $k_{1-14, 16} = 1,0$  отн. ед., а волновое число среды, соответствующей барьеру, то есть  $k_b = k_{15}$ , будем плавно менять от 0,1 до 20,0 отн. ед. Для удобства терминологии будем называть величину  $k_b$  «высотой» барьера. Получаемые зависимости представлены на рис. 7.12.

Из рис. 7.12, а видна четкая периодичность зависимости коэффициента отражения от высоты барьера. Такой же четкой периодичности следуют действительная (рис. 7.12, б) и мнимая (рис. 7.12, в) части амплитуды отраженной волны, а также ее фаза (рис. 7.12, г). Заметим, что последняя зависимость соответствует непрерывному увеличению набега фазы во всем интервале изменения  $k_b$ , а видимые осцилляции происходят из-за периодичности значения тангенса через 180 градусов.

Рассмотрим формирование периодичности приведенных зависимостей более подробно.

## 7.6. Модель резонанса внутри барьера

Для интерпретации периодического характера зависимости коэффициента отражения от волнового числа в среде барьера, введем модель резонанса внутри барьера.

В качестве электрического эквивалента рассмотрим длинную линию, в начале которой включен источник, создающий волну, а на конце находится нагрузка, являющаяся эквивалентом барьера.

Будем полагать, что внутри барьера, благодаря возможности отражения от обеих его границ, устанавливается стоячая волна. Резонанс наступает тогда, когда по длине барьера укладывается целое число полуволн. Пусть длина волны такова, что по длине барьера укладывается одна полуволна. Тогда, обозначая длину барьера через  $\Delta x$ , получаем условие резонанса в виде:

$$1 \cdot \frac{\lambda_1}{2} = \Delta x. \quad (7.40)$$

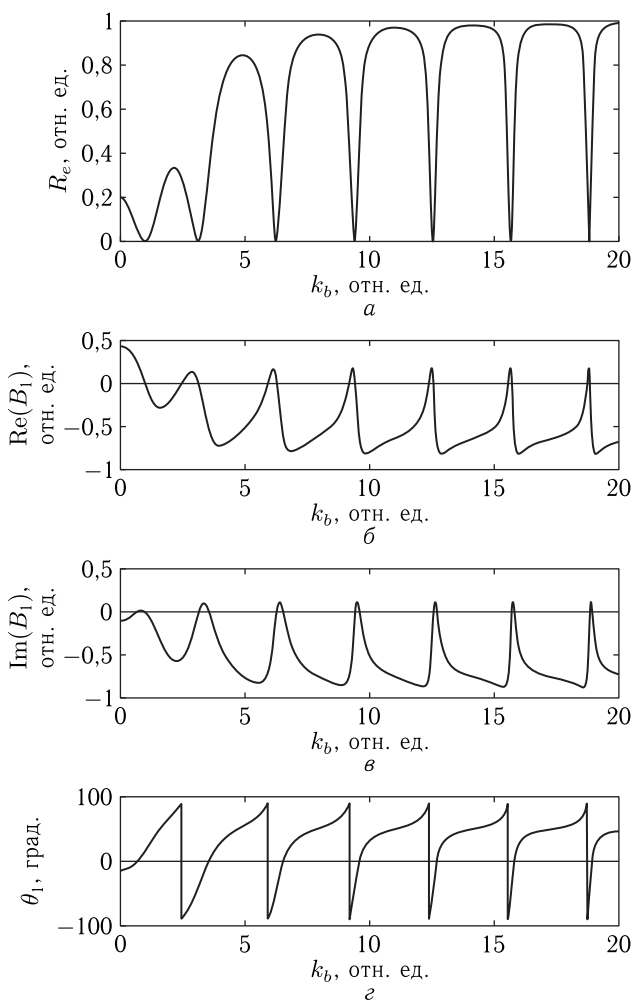


Рис. 7.12. Зависимости коэффициента отражения (а), действительной (б) и мнимой (в) частей амплитуды отраженной волны, а также ее фазы (г) от волнового числа среды, соответствующей барьеру  $k_b$ . Волновые числа в средах вне барьера равны 1,0 отн. ед.

Учитывая, что длина волны связана с волновым числом соотношением

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (7.41)$$

получаем

$$k_1 = \frac{\pi}{\Delta x}. \quad (7.42)$$

Положим теперь, что длина волны такова, что на длине барьера укладываются две полуволны. Тогда условие резонанса принимает вид:

$$2 \cdot \frac{\lambda_2}{2} = \Delta x, \quad (7.43)$$

откуда получаем

$$k_2 = \frac{2\pi}{\Delta x}. \quad (7.44)$$

Аналогично для трех полуволн получаем

$$k_3 = \frac{3\pi}{\Delta x} \quad (7.45)$$

и так далее, то есть

$$k_n = \frac{n\pi}{\Delta x}, \quad (7.46)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — целое число.

По аналогии с резонансом в струне [54, стр. 82–96], можно полагать, что если укладывается нечетное число полуволн то это соответствует собственным модам струны с закрепленными концами, а четное число полуволн — струне со свободными концами.

Резонансную нагрузку на линию можно рассматривать как включенный на конце линии колебательный контур. При этом (в отсутствие затухания) сопротивление параллельного контура бесконечно велико, а последовательного — бесконечно мало. Положим, что струна с закрепленными концами аналогична параллельному контуру, а со свободными — последовательному. То есть укладывание нечетного числа полуволн эквивалентно бесконечно большому сопротивлению, а четного — бесконечно малому. В обоих случаях отражение от такой неоднородности, то есть от барьера будет бесконечно велико, то есть формула (7.46) дает последовательность волновых чисел барьера, которые соответствуют максимумам коэффициента отражения.

Обратимся теперь к рис. 7.12, *a*. Можно видеть, что максимумы коэффициента отражения приходятся на значения волнового числа равные 2, 5, 8, 11, 14, 17 и так далее, что представляет собой арифметическую прогрессию с разностью, равной 3 отн. ед. Из формулы (7.46), полагая длину барьера  $\Delta x = 1$  отн. ед. и  $\pi \approx 3$ , получаем последовательность резонансных волновых чисел: 3, 6, 9, 12, 15, 18 и так далее, все члены которой отличаются от наблюдаемой из рис. 7.12, *a* последовательности на единицу. То есть вместо формулы (7.46) лучшее соответствие дает формула

$$k_n = \frac{n\pi}{\Delta x} - 1. \quad (7.47)$$

Такое отличие, по-видимому, принципиальным не является и обусловлено особенностью пересчета импеданса в крайних слоях структуры, что приводит к резкому уменьшению расчетного значения коэффициента отражения при  $x = x_0$  и  $x = x_{16}$ , как это видно из рис. 7.11, *д, е, и, к*. Заметим, что относительная величина сдвига по мере увеличения номера  $n$ , уменьшается, то есть точность предложенной резонансной модели возрастает.

Таким образом, соответствие между наблюдаемой последовательностью максимумов зависимости коэффициента отражения от волнового числа среды барьера и данными резонансной модели можно считать вполне удовлетворительными.

### 7.6.1. Изменение длины барьера

Проведенное в предыдущих разделах рассмотрение выполнено при условии, что длина барьера равна 1 отн. ед. Периодический характер зависимости коэффициента отражения  $R_e$  от высоты барьера  $k_b$ , представленной на рис. 7.12, *а*, интерпретирован через определенную величину длины барьера, обозначенную в формуле (7.47) через  $\Delta x$ . Можно полагать, что период зависимости  $R_e$  от  $k_b$ , который обозначим далее через  $P_R$ , должен зависеть от длины барьера, для которой введем обозначение  $L_b$  (то есть в формуле (7.47)) величина  $\Delta x$  должна быть заменена на  $L_b$ ). Для рассмотрения этого вопроса обратимся к рис. 7.13, где представлены зависимости коэффициента отражения от высоты барьера при различных значениях длины барьера.

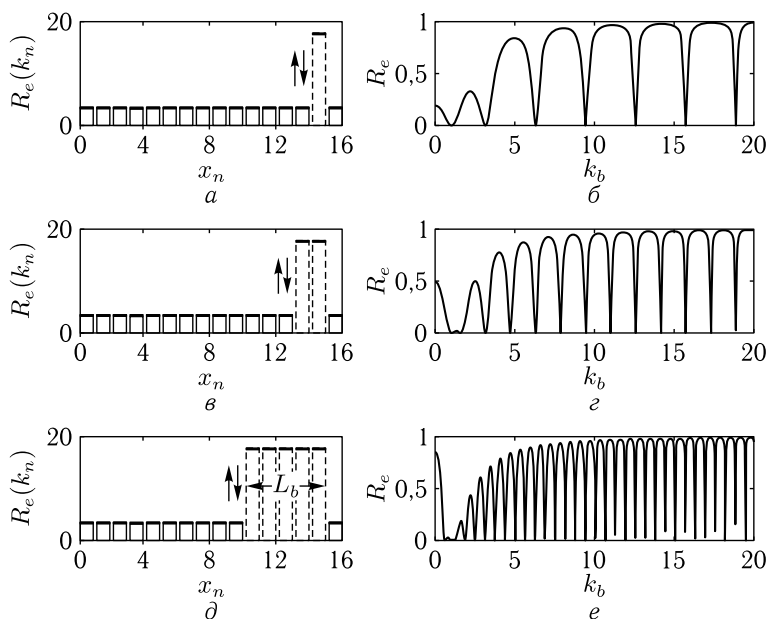


Рис. 7.13. Зависимость коэффициента отражения  $R_e$  от высоты барьера  $k_b$  при изменении длины барьера  $L_b$ . Левый столбец — распределение волновых чисел по длине структуры, правый столбец — соответствующие зависимости коэффициента отражения от высоты барьера. *а, б* —  $L_b = 1$  отн. ед.; *в, г* —  $L_b = 2$  отн. ед.; *д, е* —  $L_b = 5$  отн. ед. Волновые числа всех сред, кроме барьера, равны 1 отн. ед. Волновое число среды барьера меняется от 0,1 до 20 отн. ед.

Из рисунка видно, что все зависимости коэффициента отражения от высоты барьера, начинаясь от довольно заметной величины, сначала спадают, достигая нуля при высоте барьера, равной единице, после чего нарастают, стремясь при высоте барьера около 10 отн. ед. к единице. Такое поведение обусловлено соотношением между высотой барьера и величиной волновых чисел в остальных средах. Когда волновое число, соответствующее высоте барьера, равняется волновым числам окружающих сред, то есть 1 отн. ед., неоднородность исчезает, так что коэффициент отражения становится равным нулю. Чем больше отличается волновое число барьера от чисел окружающих сред, тем отражение больше, так что зависимости на рис. 7.13, *г*, *д*, *е* в обе стороны от  $k_b = 1$  увеличиваются. Однако коэффициент отражения не может превышать единицу (что противоречило бы сохранению энергии), так что при значительном различии между волновым числом среды барьера и волновыми числами окружающих сред, стремится к единице, как это видно из рис. 7.13, *г*, *д*, *е* при  $k_b > 1$ .

Важнейшей особенностью рисунка является тот факт, что при увеличении длины барьера (то есть по левому столбцу сверху вниз) период осцилляций зависимости коэффициента отражения от высоты барьера (правый столбец) уменьшается. Такое уменьшение как раз соответствует обратной зависимости, даваемой формулой (7.47).

Для более точного выявления характера зависимости периода осцилляций  $P_R$  от длины барьера  $L_b$  обратимся к рис. 7.14, где такая зависимость построена в широком интервале изменения  $L_b$ . На рисунке точки соответствуют непосредственному измерению периода

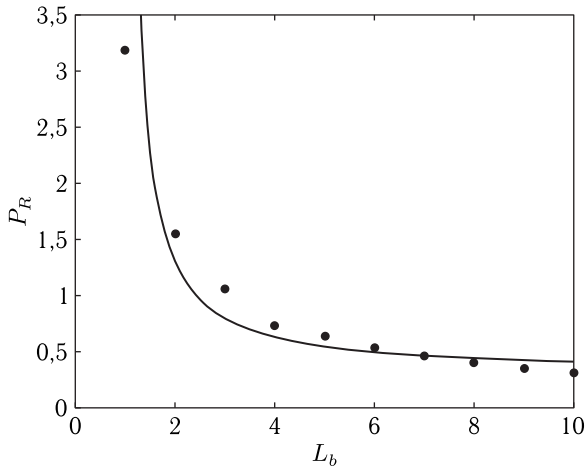


Рис. 7.14. Зависимость периода осцилляций коэффициента отражения при изменении высоты барьера от длины барьера. Точки — результаты машинного эксперимента, линия построена по формуле (7.48). Все параметры — те же, что на рис. 7.13

по кривым, подобным приведенным на рис. 7.13, б, г, е. Сплошная линия построена по формуле

$$P_R = \frac{1}{L_B - 1} + 0,3. \quad (7.48)$$

Можно видеть, что по структуре эта формула, с точностью до числовых коэффициентов порядка единицы, подобна формуле (7.47).

Из рисунка видно, что соответствие между кривой и точками находится в пределах около 10%. Таким образом, можно полагать, что предложенная в разделе 7.6 модель резонанса внутри барьера отражает наблюдаемую картину с довольно высокой степенью точности.

## 7.7. Комплексный барьер

Все проделанное выше рассмотрение выполнялось в предположении отсутствия потерь энергии в структуре, то есть волновые числа всех сред, в том числе барьера, были чисто действительными. Рассмотрим теперь случай, когда внутри барьера имеются потери энергии, так что волновое число среды барьера имеет комплексный характер. Обратим внимание на коэффициенты отражения, прохождения и поглощения. Поскольку пересчет импедансов дает возможность определить только коэффициент отражения, то здесь будем пользоваться пересчетом амплитуд в соответствии с рекуррентными формулами (7.8)–(7.9). При этом для расчета коэффициентов отражения  $R_e$  и прохождения  $T_e$  будем пользоваться формулами (7.11)–(7.12), а для расчета коэффициента поглощения  $A_e$  — формулой (7.13).

Предварительная проверка показывает, что, как и в случае действительного барьера, перемещение положения комплексного барьера по длине структуры перечисленные коэффициенты не меняет (изменяется лишь распределение амплитуд, но коэффициенты остаются постоянными). Поэтому для простоты рассмотрения и удобства сравнения с предыдущими случаями барьер разместим в среде № 15 и его волновое число будем менять, а волновые числа во всех остальных средах положим постоянными и равными  $k_{1-14,16} = 1$  отн. ед.

Сначала предположим, что действительная часть волнового числа среды барьера остается постоянной, а мнимая часть меняется. Будем описывать волновое число среды барьера с помощью формулы:

$$k_{15} = 1,0 - i \cdot 0,5G_{km}, \quad (7.49)$$

где  $G_{km}$  — параметр мнимой части высоты барьера, представляющий собой действительное число, которое будем менять в пределах от 0,1 до 20 отн. ед. То есть начнем с величины, при которой мнимая часть высоты барьера в 10 раз меньше высоты окружающих сред, а закончим, когда мнимая часть превысит высоту окружающих сред в 20 раз. Проверка показывает, что такой интервал отражает изменение всех

рассматриваемых коэффициентов в достаточной степени, так как далее они меняются мало, стремясь к постоянным значениям.

Полученные результаты представлены на рис. 7.15.

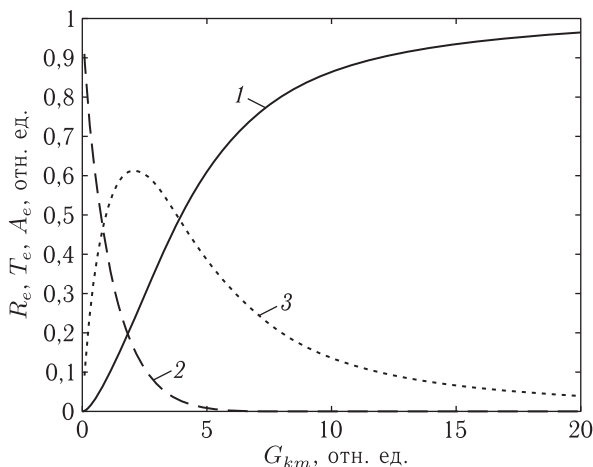


Рис. 7.15. Зависимости коэффициентов отражения (1), прохождения (2) и поглощения (3) от параметра мнимой части высоты барьера, меняющегося в соответствии с формулой (7.49)

Из рисунка видно, что коэффициент отражения (кривая 1), начинаясь с нуля, по мере увеличения мнимой составляющей высоты барьера плавно увеличивается, постепенно переходя к насыщению, устремляясь к единице, что соответствует полному отражению. Равенство величины  $R_e$  нулю при  $G_{km} = 0$  происходит из-за того, что в этом случае волновое число среды барьера становится равным волновым числам окружающих сред, так что от барьера ничего не отражается. Далее, по мере увеличения  $G_{km}$  отражение возрастает, так как структура становится более неоднородной, а насыщение со стремлением к единице происходит из-за того, что неоднородность возрастает настолько, что уже вся энергия падающей волны отражается обратно и дальше отражению расти уже некуда, ибо это противоречило бы сохранению энергии.

Коэффициент прохождения (кривая 2) наоборот начинается с величины, близкой к единице, а при увеличении мнимой части волнового числа барьера довольно быстро падает, в пределе стремясь к нулю. Начало такой зависимости опять соответствует полному равенству волнового числа среды барьера волновым числам окружающих сред, так что падающая волна проходит полностью. Когда мнимая компонента волнового числа барьера увеличивается, прохождение ухудшается, так как часть энергии отражается и еще часть поглощается. Благодаря одновременному действию отражения и поглощения, кривая 2 идет круче,



чем кривая 1. Далее, отражение и поглощение настолько увеличиваются, что на долю прохождения уже ничего не остается и коэффициент прохождения стремится к нулю.

Коэффициент поглощения (кривая 3) начинается от нуля, так как волновое число среды барьера при этом равно волновым числам окружающих сред, то есть неоднородность структуры отсутствует. Далее, от структуры отражается еще довольно малая часть падающей энергии, так что поглощение растет. Однако, пройдя определенный максимум, поглощение убывает, а затем и вовсе стремится к нулю, так как структура становится настолько неоднородной, что над всем преобладает отражение.

Проведенное рассмотрение относится к случаю, когда действительная часть волнового числа среды барьера остается постоянной и равной действительным волновым числам окружающих сред. Поэтому резонанс внутри барьера (раздел 7.6) возникнуть не может, так как для действительной части волнового числа неоднородность отсутствует. Рассмотрим теперь одновременное изменение действительной и мнимой частей волнового числа среды барьера, для чего представим это число в виде:

$$k_{15} = (1,0 - i \cdot 0,1)G_{kc}, \quad (7.50)$$

где  $G_{kc}$  — параметр, подобный  $G_{ktm}$ , но теперь относящийся к волновому числу в целом. Это параметр также будем менять от 0,1 до 20 отн. ед.

Полученные результаты представлены на рис. 7.16.

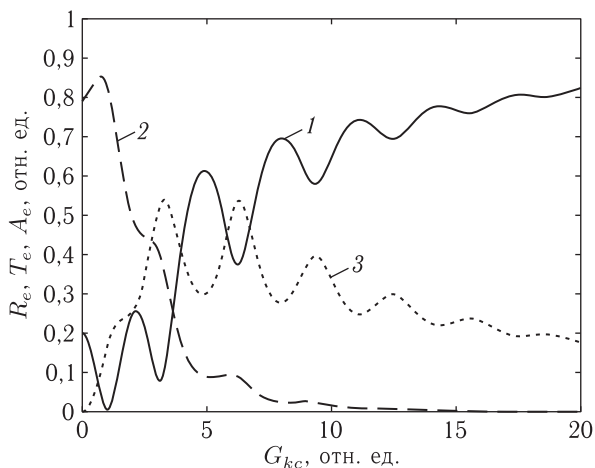


Рис. 7.16. Зависимости коэффициентов отражения (1), прохождения (2) и поглощения (3) от параметра комплексного волнового числа барьера, меняющегося в соответствии с формулой (7.50)

Из рисунка видно, что коэффициенты отражения (кривая 1), прохождения (кривая 2) и поглощения (кривая 3) ведут себя довольно сходно с подобными зависимостями, приведенными на рис. 7.15, однако здесь на все кривые накладываются осцилляции, амплитуда которых по мере увеличения  $G_{kc}$  постепенно уменьшается.

Из сравнения с результатами раздела 7.6.1, можно заключить, что осцилляции вызваны резонансами в среде барьера. Уменьшение амплитуды осцилляций по мере увеличения  $G_{kc}$  отражает уменьшение «добротности» резонатора из-за возрастания затухания. Проверка показывает, что при увеличении длины барьера период осцилляций уменьшается подобно тому, как это показано в разделе 7.6.1 (рис. 7.13). Таким образом, можно полагать, что и здесь наблюдаемые результаты отражаются резонансной моделью с приемлемой степенью достоверности.

### Выводы по главе 7

Данная глава посвящена применению метода обобщенного импеданса к распространению одномерной волны в многослойной структуре, содержащей барьер прямоугольного типа.

Предложены определения и исследовано распространение волн через положительный, отрицательный, действительный и комплексный барьеры. В качестве базовой рассмотрена структура, состоящая из 16 сред.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Приведена общая геометрия задачи, представляющая собой структуру из произвольного числа однородных слоев, разделенных границами. На основе решения волнового уравнения для каждого слоя, показано, что в слое распространяются две волны — прямого и встречного направлений, а на границах между слоями выполняется равенство амплитуд волн и обобщенных импедансов. В качестве рабочего параметра различения слоев выбрано волновое число одномерной волны, распространяющейся в каждом однородном участке структуры. Прямоугольный барьер представлен в виде участка структуры, в котором волновое число сохраняется постоянным, причем вне барьера волновое число также остается постоянным, но отличным от волнового числа внутри барьера. В качестве инструмента расчета используется метод обобщенного импеданса в двух вариантах — пересчета импедансов и пересчета амплитуд.

2. Введено понятие единичного барьера как слоя, параметры которого отличаются от параметров всех остальных слоев структуры, которые сохраняются равными друг другу. В качестве вариантов предложены определения положительного, отрицательного, действительного и комплексного барьеров.

3. Рассмотрено перемещение действительного отрицательного единичного барьера по длине структуры, то есть поочередное принятие вол-

нового числа такого барьера различными слоями структуры. В качестве измеряемого параметра выбраны действительная и мнимая части входных импедансов структуры. Установлено, что изменение входного импеданса по длине структуры имеет периодический характер, причем осцилляции наблюдаются только в той части структуры, которая расположена между ее входом и положением единичного барьера, тогда как в остальной части структуры входной импеданс остается постоянным. Отмечено, что такое поведение входного импеданса обусловлено направлением пересчета импедансов от конца структуры к ее началу, так что осцилляции начинаются только тогда, когда процедура пересчета достигает места расположения единичного барьера. Отмечена крайне высокая сложность поведения осциллирующий при изменении параметров структуры. Рассмотрены три параметра: полная длина структуры, высота барьера и его длина. Отмечено, что наиболее сильно на характере осцилляций сказывается полная длина структуры, изменение которой на единицы процентов вызывает резкое изменение структуры осцилляций. Влияние высоты барьера проявляется при изменении ее величины в 2–3 раза, а для заметного влияния длины барьера требуется ее увеличение в 4–5 раз.

4. На основе рассмотрения структуры рекуррентных формул пересчета импедансов, получены аналитические выражения, качественно моделирующие зависимости действительной и мнимой частей входных импедансов сред от координаты вдоль структуры. Найдены численные параметры, обеспечивающие соответствие полученных формул с реально наблюдаемыми зависимостями с точностью порядка 10 %.

5. Рассмотрено многообразие зависимостей действительных частей входных импедансов сред от координаты при различных значениях волнового числа среды барьера. Выявлены три характерных режима, соответствующие различному характеру осцилляций: режим № 1 — четкая периодичность, режим № 2 — нарушенная периодичность, режим № 3 — монотонный рост. Выявлено базовое значение волнового числа, половина длины волны для которого равна длине (толщине) двух слоев структуры. Отмечено, что режим № 1 имеет место тех случаях, когда волновое число кратно произведению базового волнового числа на нечетное число, а режим № 3 имеет место в тех случаях, когда волновое число кратно произведению базового числа на четное число. Соотношения кратности по обоим режимам выполняются в пределах  $\pm 10\%$ , а во всех остальных случаях имеет место режим № 2.

6. Рассмотрено изменение периода зависимости действительной части входного импеданса от координаты при одновременном изменении волнового числа во всех средах путем умножения на нормирующий коэффициент. Отмечен периодический характер зависимости такого периода от нормирующего коэффициента. Установлено, что при монотонном увеличении волнового числа в одинаковой пропорции во всех средах режимы сменяют друг друга периодическим образом в последовательности: 1-2-3-2-1-2-3-2-1 и так далее. Получена аналитическая формула, по структуре сходная с формулой, моделирующей зависи-

мость действительных частей входных импедансов сред от координаты вдоль структуры, отражающая зависимость периода от нормирующего коэффициента с точностью порядка 10%.

7. Рассмотрено перемещение действительного положительного единичного барьера по длине структуры, то есть поочередное принятие волнового числа такого барьера различными слоями структуры. В качестве измеряемого параметра выбраны действительная и мнимая части входных импедансов структуры. Установлено, что перемещение положительного барьера по длине структуры оказывает на распределение импедансов влияние, аналогичное перемещению отрицательного. Отличие состоит только в некотором изменении амплитуды и сдвиге по длине структуры распределения как целого. Вследствие незначительности отличий, для дальнейшего рассмотрения положительный барьер установлен в наиболее удаленном от начала слое структуры.

8. Рассмотрено изменение высоты положительного барьера при изменении волнового числа в среде барьера в интервале от 0,1 до 4 раз относительно волновых чисел окружающих сред. Выявлен периодический характер зависимостей действительных и мнимых частей входных импедансов слоев структуры от координаты. Показано, что зависимость периода осцилляций от высоты барьера имеет обратно пропорциональный характер с точностью полрядка 10%. Периодичность зависимостей входного импеданса от координаты описана на основе формулы, с точностью до числовых коэффициентов совпадающей с формулой, предложенной для таких же осцилляций в случае отрицательного барьера.

9. Исследован коэффициент отражения для всех рассмотренных выше случаев. Прежде всего установлено, что величина коэффициента отражения в случае как отрицательного, так и положительного барьеров при перемещении барьера с сохранением его параметров по длине структуры, не меняется, то есть коэффициент отражения от положения барьера не зависит. Также не зависит от положения барьера модуль отраженной волны, однако амплитуда ее действительной и мнимой составляющих по мере перемещения барьера по длине структуры меняется синусоидальным образом. При этом модуль отраженной волны, как квадратный корень из суммы квадратов действительной и мнимой частей, сохраняется постоянным, а набег фазы, как арктангенс отношения мнимой и действительной частей, меняется также синусоидальным образом.

10. Рассмотрено изменение амплитуды и фазы отраженной волны, а также коэффициента отражения при изменении высоты барьера. Отмечен периодический характер всех этих зависимостей. Для интерпретации периодичности наблюдаемых зависимостей предложена модель резонанса внутри барьера. На основе аналогии с распространением электромагнитной волны в длинной линии, нагруженной на конце параллельным или последовательным колебательным контуром, установлены положения максимумов зависимости коэффициента отражения от волнового числа среды барьера. Установлено, что такая зависимость, по мере увеличения волнового числа барьера, начинается с величины,

близкой к единице, после чего сначала убывает, достигая нуля, когда волновое число барьера становится равным волновому числу окружающих сред, а после прохождения минимума снова возрастает, в пределе стремясь к единице.

11. Рассмотрен характер изменения зависимости коэффициента отражения от высоты барьера при изменении длины барьера. Показано, что по мере увеличения длины барьера периодическая зависимость коэффициента отражения от волнового числа барьера сгущается, причем период такой зависимости меняется обратно пропорционально длине барьера с точностью порядка 10 %.

12. Рассмотрены особенности распространения волны в случае барьера, имеющего комплексный характер. Для определения коэффициентов отражения и прохождения, а также следующего из них коэффициента поглощения, использован метод обобщенного импеданса в варианте пересчета амплитуд. Установлено, что, как и в случае действительного барьера, перемещение положения комплексного барьера по длине структуры перечисленные коэффициенты не меняет, то есть, несмотря на то, что распределение амплитуд внутри структуры испытывает вариации, коэффициенты отражения, прохождения и поглощения остаются постоянными.

13. Рассмотрен случай, когда действительная часть волнового числа среды барьера остается постоянной, равной действительным частям окружающих сред, а мнимая часть волнового числа барьера меняется в широких пределах — от 0,1 до 20 значений действительной части волнового числа. Показано, что коэффициент отражения, начинаясь с нуля, по мере увеличения мнимой части волнового числа барьера плавно возрастает, в пределе стремясь к единице. При этом коэффициент прохождения также плавно убывает, причем скорее, чем возрастает коэффициент отражения, в пределе стремясь к нулю. При этом коэффициент поглощения, начинаясь с нуля плавно возрастает, достигая максимума тогда, когда коэффициент прохождения уменьшается почти на порядок от первоначальной величины, после чего плавно убывает, в пределе стремясь к нулю.

14. Рассмотрен случай, когда действительная и мнимая части волнового числа среды барьера одновременно возрастают в одинаковой пропорции, то есть волновое число меняется все целиком. Установлено, что в этом случае зависимости коэффициентов отражения, прохождения и поглощения ведут себя образом, подобным первому случаю, однако теперь на плавные кривые накладываются осцилляции, период которых сохраняется постоянным, а амплитуда по мере увеличения волнового числа постепенно убывает. Отмечено, что характер осцилляций совпадает с таковым, присущим зависимостям коэффициента отражения от действительного волнового числа, описываемым в рамках модели резонанса внутри барьера, а уменьшение амплитуды осцилляций обусловлено ростом затухания падающей волны по мере ее распространения.

## Глава 8

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИМПЕДАНСА ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ СТУПЕНЧАТО НАРАСТАЮЩИЙ БАРЬЕР

Глава посвящена применению метода обобщенного импеданса для решения практической задачи о распространении волны через многослойную структуру, содержащую ступенчато нарастающий барьер. Рассмотрение ограничено случаем одномерной волны. Получены амплитуды волн, распространяющихся в обоих направлениях, а также коэффициенты отражения и прохождения в зависимости от энергии. Рассмотрены особенности распространения волны в случае барьера, имеющего комплексный характер, в том числе в ступенчато нарастающей структуре, слои которой обладают положительной и отрицательной диссипацией.

В главе частично использован материал работы [105]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 8.1. Геометрия задачи и основной математический аппарат

Как и в работах [103, 104] будем рассматривать распространение одномерной волны постоянной частоты через структуру, состоящую из определенного числа слоев одинаковой толщины. Полное число слоев обозначим через  $N$  и все слои пронумеруем целыми числами  $n$ , где  $n = 1, 2, \dots, N$ . Будем считать, что в пределах каждого отдельного слоя среда остается однородной, ее свойства описываются единым волновым числом, которое от слоя к слою может меняться. Таким образом, основной характеристикой каждого отдельного слоя является волновое число  $k_n$ , связанное с частотой  $\omega$  и скоростью волны в данном слое  $v_n$  соотношением

$$k_n = \frac{\omega}{v_n}. \quad (8.1)$$

Полагаем распределение волновых чисел слоев в виде наклонного барьера, нарастающего по координате  $x$  вдоль структуры с определенным шагом. В простейшем случае шаг будет постоянным, в более сложных случаях он может меняться. Более подробно схема геометрии задачи представлена на рис. 8.1.

Начало структуры соответствует координате  $x_0$ , ее конец —  $x_N$ . Положения границ определяются координатами  $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ .

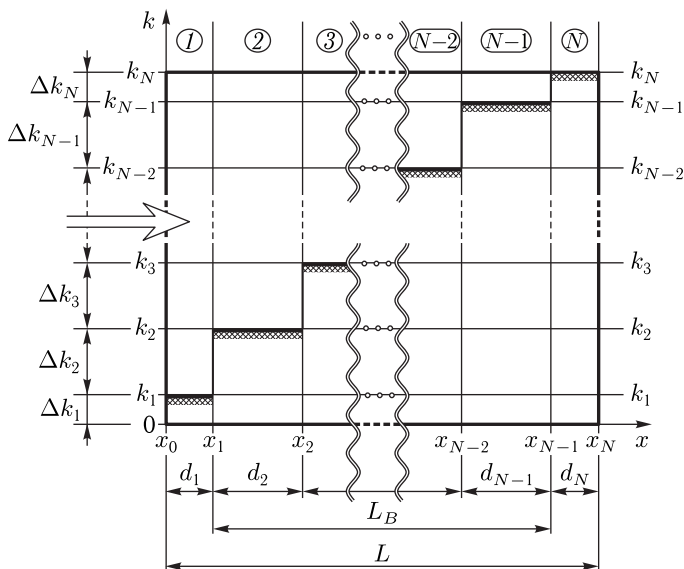


Рис. 8.1. Геометрия задачи для падения волны на наклонный ступенчатый барьер. Цифры в кругах в верхней части рисунка — номера сред. Слева расширенной стрелкой показано направление падающей волны. Полная длина структуры равна  $L$ , длина барьера равна  $L_B$

Соответственно номера границ равняются  $1, 2, \dots, N - 1$ . Таким образом, структура содержит  $N$  слоев, разделенных  $N - 1$  границами. При этом толщины слоев определяются формулой

$$d_n = x_n - x_{n-1}. \quad (8.2)$$

при изменении  $n$  от 1 до  $N$ . Полная длина структуры имеет вид:

$$L = \sum_{n=1}^N d_n. \quad (8.3)$$

Для простоты дальнейшего рассмотрения положим, что шаг по волновому числу на каждой ступеньке структуры одинаков, то есть

$$\Delta k_1 = \Delta k_2 = \dots = \Delta k_n = \dots = \Delta k_N = \Delta k. \quad (8.4)$$

При этом волновое число в слое с номером  $n$  будет определяться выражением

$$k_n = \Delta k \cdot n. \quad (8.5)$$

Относительно распространения волны в положительном направлении оси  $Ox$  такую структуру можно рассматривать как барьер, высота которого по координате возрастает. Будем называть такую структуру «ступенчато нарастающим барьером».

В каждом слое распространяются две волны: волна прямого направления  $A_n$  и волна обратного (встречного) направления  $B_n$ . На крайних границах структуры при  $x = x_0$  и  $x = x_N$  отражение волн отсутствует.

В структуру со стороны среды 1 входит прямая волна с амплитудой  $A_1$ . В той же среде распространяется отраженная волна обратного направления  $B_1$ . В среде  $N$  распространяется только волна прямого направления  $A_N$ , а волна обратного направления  $B_N$  отсутствует, то есть  $B_N = 0$ .

В структуре распространяются гармонические волны, координатная составляющая которых определяется волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + k_n^2 U_n = 0, \tag{8.6}$$

решение которого имеет вид:

$$U_n = A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}. \tag{8.7}$$

В этом выражении первое слагаемое определяет волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $Ox$ , а второе — в отрицательном направлении той же оси.

Волновые числа  $k_n$  во всех средах структуры предполагаются известными (в простейшем, хотя и не обязательном случае — по формуле (8.5)). Нулевые импедансы сред соответственно равны:

$$Z_{n0} = \frac{1}{k_n}. \tag{8.8}$$

Обобщенные импедансы в тех же средах равны:

$$Z_n = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}}{A_n e^{-ik_n x} - B_n e^{ik_n x}}. \tag{8.9}$$

При расчете будем пользоваться полученными в главе 6 рекуррентными формулами (6.105), (6.106) для пересчета амплитуд от конца структуры к ее началу:

$$A_{n-1} = \frac{A_n(Z_{(n-1)0} + Z_{n0}) - B_n(Z_{(n-1)0} - Z_{n0})e^{-ik_n d_n}}{2Z_{n0}} e^{ik_{n-1} d_{n-1}}; \tag{8.10}$$

$$B_{n-1} = \frac{-A_n(Z_{(n-1)0} - Z_{n0}) + B_n(Z_{(n-1)0} + Z_{n0})e^{-ik_n d_n}}{2Z_{n0}}. \tag{8.11}$$

Для расчета коэффициентов отражения и прохождения будем использовать приведенные в главе 6 формулы (6.124), (6.125):

$$R_e = \left| \frac{B_1(A_1)}{A_1} \right|^2; \tag{8.12}$$

$$T_e = \left| \frac{A_N(A_1)}{A_1} \right|^2 \operatorname{Re} \left( \frac{k_{N0}}{k_{10}} \right). \tag{8.13}$$



При этом коэффициент поглощения [128, 129], в соответствии с законом сохранения энергии, имеет вид:

$$A_e = 1 - R_e - T_e. \quad (8.14)$$

## 8.2. Распределение волновых чисел и длин волн по слоям структуры

Согласно условиям задачи, заданы геометрические параметры структуры — ее полная длина и толщина каждого слоя, причем толщины всех слоев полагаются одинаковыми. Для описания распространения волн в структуре, в первую очередь, для сравнения с ее геометрическими параметрами, удобнее использовать не волновое число, а длину волны. Частоту считаем заданной и постоянной по всей длине структуры.

Волновое число имеет максимальное значение в слое № 16. Этому волновому числу соответствует минимальная длина волны  $\lambda_{\min}$ . Волновое число имеет минимальное значение в слое № 1. Этому волновому числу соответствует максимальная длина волны  $\lambda_{\max}$ . Возможные длины волн в отдельных слоях структуры заключены в пределах между этими значениями, то есть:

$$\lambda_{\min} \leq \lambda_n \leq \lambda_{\max}. \quad (8.15)$$

В общем случае длина волны  $\lambda_n$  внутри слоя  $n$  может быть как меньше, так и больше толщины слоя  $d_n$ . Если по длине слоя укладывается половина длины волны в этом слое, то в слое может возникнуть резонанс.

Максимальная длина волны  $\lambda_{\max}$  определяется не геометрическими параметрами слоя  $d$  или структуры в целом  $L$ , а минимальным волновым числом  $k_{\min}$ , которое в случае ступенчато нарастающей структуры соответствует первому слою.

Для простоты численного моделирования удобно выбрать размерные параметры задачи (то есть величину «относительной единицы») таким образом, чтобы волновое число измерялось целыми числами, причем в каждом последующем слое это чисто возрастало на одну относительную единицу. При этом, если положить в первом слое волновое число равным 1 отн. ед., то во втором оно будет равно 2 отн. ед., в третьем — 3 отн. ед. и так далее, вплоть до последнего слоя с номером  $N$ , где волновое число будет равно  $N$  отн. ед. Будем называть такое распределение волновых чисел «базовым».

Для характеристики произвольного волнового числа, не равного целому числу относительных единиц, введем коэффициент  $g_c$ , определяемый соотношением

$$g_c = \frac{2\pi}{\lambda_{\max}}. \quad (8.16)$$

При этом волновое число  $k_n$  в слое  $n$  будет определяться формулой

$$k_n = k_{bn} g_c, \quad (8.17)$$

где  $k_{bn}$  — базовое значение волнового числа в слое  $n$ .

**8.2.1. Пример распределения для структуры из 16 слоев**

В качестве примера приведем распределение волновых чисел и длин волн по слоям для структуры, состоящей из 16 слоев. Возьмем два максимальных значения длины волны:  $\lambda_{\max} = 6,0$  отн. ед. и  $\lambda_{\max} = 0,1$  отн. ед. Такие значения выбраны как крайние, значительно отличающиеся в ту и другую сторону от базовой толщины (длины) одного слоя, которая принята равной 1 отн. ед.

Полученные распределения волновых чисел и длин волн по слоям структуры приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1. Распределение волновых чисел и длин волн по слоям структуры

№№ слоя $n$	Базовое волновое число $k_{bn}$	Максимальная длина волны $\lambda_{\max} = 6,0$ отн. ед. $g_c = 1,0472$		Максимальная длина волны $\lambda_{\max} = 0,1$ отн. ед. $g_c = 62,8319$	
		Волновое число $k_n$	Длина волны $\lambda_n$	Волновое число $k_n$	Длина волны $\lambda_n$
1	1,00	1,0472	6,0000	62,83	0,1000
2	2,00	2,0944	3,0000	125,66	0,0500
3	3,00	3,1416	2,0000	188,49	0,0333
4	4,00	4,1888	1,5000	251,33	0,0250
5	5,00	5,2369	1,2000	314,16	0,0200
6	6,00	6,2836	1,0000	376,99	0,0167
7	7,00	7,3304	0,8571	439,82	0,0143
8	8,00	8,3776	0,7500	502,66	0,0125
9	9,00	9,4248	0,6667	565,49	0,0111
10	10,00	10,4720	0,6000	628,32	0,0100
11	11,00	11,5192	0,5455	691,15	0,0091
12	12,00	12,6564	0,5000	753,98	0,0083
13	13,00	13,6136	0,4615	816,81	0,0072
14	14,00	14,6608	0,4286	879,64	0,0071
15	15,00	15,7080	0,4000	942,48	0,0067
16	16,00	16,7252	0,3757	1005,30	0,0063

В первом столбце таблицы приведен номер слоя. Во втором — базовое волновое число. В третьем — волновое число при  $\lambda_{\max} = 6,0$  отн. ед., полученное по формуле (8.17) при  $g_c = 1,0472$ . В четвертом — длина волны, соответствующая такому волновому числу. В столбцах пятом и шестом — те же параметры, что и в третьем-четвертом, соответствующие  $\lambda_{\max} = 0,1$  отн. ед. и  $g_c = 62,8319$ .

Из таблицы видно, что при минимальной длине волны 0,3757 отн. ед. (то есть при  $\lambda_{\max} = 6,0$  отн. ед.) условию резонанса (то есть половине длины волны) соответствует толщина слоя в два раза меньшая, то есть

0,1878 отн. ед. В этом случае полная длина структуры будет в 16 раз больше, то есть 3,0056 отн. ед., что близко к половине максимальной длины волны.

При минимальной длине волны 0,0063 отн. ед. ( $\lambda_{\max} = 0,1$  отн. ед.) условию резонанса соответствует толщина слоя 0,0032 отн. ед., так что полная длина структуры равна 0,0504 отн. ед., то есть тоже половине максимальной длины волны.

Проверка показывает, что такая зависимость выполняется при любом числе слоев структуры, что соответствует соотношению

$$\frac{\lambda_{\min}}{2} N = \frac{\lambda_{\max}}{2}, \quad (8.18)$$

где  $N$  — полное число слоев.

Учитывая связь между длиной волны и волновым числом

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}, \quad (8.19)$$

можно видеть, что (8.18) эквивалентно соотношению между максимальным и минимальным волновыми числами вида:

$$k_{\max} = k_{\min} N, \quad (8.20)$$

которое заложено изначально как одно из условий построения геометрии структуры (раздел 8.1).

### 8.3. Формирование амплитуды колебаний при различной длине структуры

Важнейшим параметром, определяющим распространение волны в структуре со ступенчато нарастающим барьером является соотношение между длиной волны и длиной структуры в целом. Рассмотрим сначала этот вопрос с качественной стороны, для чего обратимся к рис. 8.2, где показана схема формирования амплитуды колебаний волны при различной длине структуры. Согласно геометрии задачи (раздел 8.1), при любой длине структуры максимальная длина волны  $\lambda_{\max}$  задается значением минимального волнового числа в первом слое  $k_1$ , то есть всегда сохраняется. На рисунке рассмотрены два принципиально различных случая, когда длина структуры меньше половины максимальной длины волны (*а*) и в случае, когда длина структуры больше половины той же длины волны (*б*).

Из рисунка можно видеть, что при  $L < \lambda_{\max}/2$  по длине структуры половина длины волны уложиться не может, то есть условия резонанса для структуры в целом, соответствующие  $L = \lambda_{\max}/2$ , не выполняются ни при какой длине структуры. Это означает, что при изменении длины структуры в пределах от нуля до  $L = \lambda_{\max}/2$  коэффициент отражения волны от структуры будет меняться монотонным образом без проявления резонансных свойств.

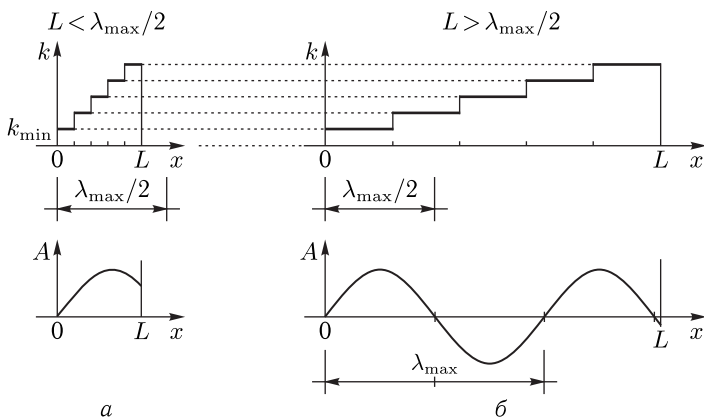


Рис. 8.2. Схема формирования амплитуды колебаний волны при малой (а) и большой (б) длине структуры. Верхний ряд — распределение волновых чисел по длине структуры, нижний — амплитуда колебаний распространяющейся волны в пределах структуры. а —  $L < \lambda_{\max}/2$ ; б —  $L > \lambda_{\max}/2$ . Для наглядности масштаб на рисунке не соблюден, параметры структуры приняты условными

При  $L > \lambda_{\max}/2$  по длине структуры может укладываться более одной половины длины волны, так что при многократном превышении  $L$  над  $\lambda_{\max}$ , в случаях  $L = (\lambda_{\max}/2)n$ , где  $n$  — произвольное целое число, условия резонанса выполняются. При этом зависимость коэффициента отражения волны от длины структуры теперь будет осциллировать с периодом, равным половине длины волны.

### 8.4. Коэффициенты отражения и прохождения при крайних значениях волновых чисел

Рассмотрим сначала предельный случай, когда заданы волновые числа только в начале и конце структуры:  $k_1$  и  $k_N$ . Внутри структуры волновые числа увеличиваются ступенчато нарастающим образом, так что все их значения находятся внутри интервала между  $k_1$  и  $k_N$ . При стремлении длины структуры к нулю, задача об отражении волны сводится к задаче об отражении от одной границы между двумя средами с крайними значениями волновых чисел  $k_1$  и  $k_N$ . В этом случае коэффициент отражения по энергии будет определяться формулой [63, стр. 38, форм. (2.23)]

$$R_{e0} = \left( \frac{k_1 - k_N}{k_1 + k_N} \right)^2. \tag{8.21}$$

Соответственно коэффициент прохождения по энергии будет определяться формулой [63, стр. 38, форм. (2.24)]

$$T_{e0} = \left( \frac{2k_1}{k_1 + k_N} \right)^2 \frac{k_N}{k_1}. \tag{8.22}$$

При этом выполняется соотношение

$$R_{e0} + T_{e0} = 1. \quad (8.23)$$

Для структуры из 16 сред, то есть при  $N = 16$ , базовые волновые числа в начальном и конечном слоях будут равны  $k_1 = 1$  отн. ед.,  $k_{16} = 16$  отн. ед. При этом из приведенных формул получаем:  $R_{e0} = 0,7785$  отн. ед.,  $T_{e0} = 0,2215$ . Можно видеть, что соотношение (8.23) выполняется.

Согласно разделу 8.2.1, при ступенчато нарастающем характере изменения волнового числа, значения волновых чисел в слоях структуры определяются умножением базовых значений на коэффициент  $g_c$ , определяемый формулой (8.16), так что волновые числа приобретают вид (8.17). Из структуры формул (8.21) и (8.22) можно видеть, что коэффициенты отражения и прохождения при этом сохраняются прежними, соответствующими базовому набору волновых чисел.

**Замечание.** Формулы (8.21) и (8.22) здесь приведены в наиболее общем случае, так что при комплексных волновых числах  $k_1$  и  $k_{16}$  коэффициенты отражения и прохождения  $R_{e0}$  и  $T_{e0}$  также будут получаться комплексными. При желании иметь эти коэффициенты в действительном виде, следует брать действительные части получаемых коэффициентов. При этом фазовые соотношения будут утеряны. Более подробно этот вопрос рассмотрен в монографии [63, стр. 34–40], а также в статье [71].

## 8.5. Коэффициент отражения при изменении длины структуры

Рассмотрим теперь соображения, изложенные в разделе 8.3, в количественном виде. В качестве примера опять возьмем ту же ступенчато нарастающую структуру из 16 слоев. Диапазон изменения максимальной длины волны  $\lambda_{\max}$  возьмем тем же самым, то есть от 0,1 отн. ед. до 6,0 отн. ед. При этом минимальное волновое число будет составлять от 1,0472 отн. ед. до 62,832 отн. ед. Полную длину структуры будем менять от нуля до 4 отн. ед. При этом толщина (длина) одного слоя будет меняться также от нуля до 0,25 отн. ед. Проверка показывает, что такие интервалы значений параметров будут достаточны для выявления основных особенностей распространения волн в рассматриваемой структуре. Ограничимся рассмотрением только коэффициента отражения, так как коэффициент прохождения, в соответствии с соотношением (8.23), будет являться дополнением коэффициента отражения до единицы, то есть зеркальным отражением его на уровне 0,5 отн. ед.

Обратимся к рис. 8.3, где показаны зависимости коэффициента отражения от длины структуры при различных значениях максимальной длины волны.

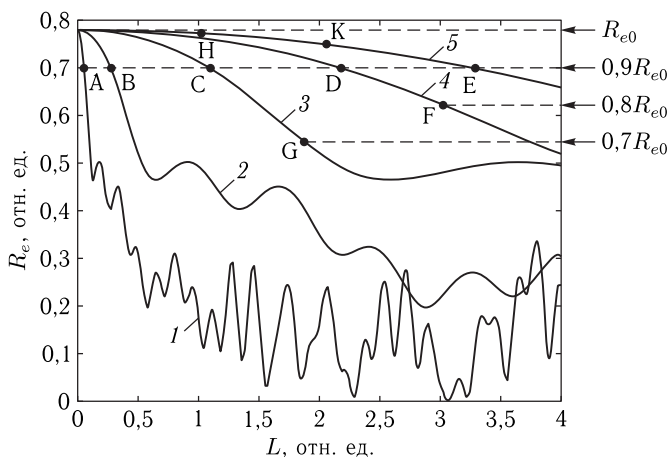


Рис. 8.3. Зависимости коэффициента отражения от длины структуры при различных значениях максимальной длины волны: 1 —  $\lambda_{\max} = 0,1$  отн. ед.; 2 —  $\lambda_{\max} = 0,5$  отн. ед.; 3 —  $\lambda_{\max} = 2,0$  отн. ед.; 4 —  $\lambda_{\max} = 4,0$  отн. ед.; 5 —  $\lambda_{\max} = 6,0$  отн. ед. Горизонтальная пунктирная линия соответствует максимальному значению коэффициента отражения  $R_{e0}$  при  $k_1 = 1$  отн. ед. и  $k_{16} = 16$  отн. ед. При этом  $R_{e0} = 0,7785$  отн. ед. Горизонтальные точечные линии соответствуют уровням коэффициента отражения, равным  $0,9R_{e0}$ ,  $0,8R_{e0}$ ,  $0,7R_{e0}$ . Эти значения показаны за правым краем рамки рисунка. Такие уровни соответствуют уменьшению коэффициента отражения от максимального значения на 10%, 20% и 30% соответственно

Прежде всего, из рисунка видно, что все кривые при  $L = 0$  отн. ед. начинаются в одной и той же точке, где  $R_c = 0,7785$  отн. ед. Это значение, а также исход кривых из единой точки, полностью согласуются с принятым в разделе 8.4 соотношением (8.21), выполняющимся в точке  $L = 0$  при любом значении максимальной длины волны (то есть коэффициента  $g_c$ ).

Далее, можно видеть, что все кривые по мере увеличения длины структуры  $L$  имеют тенденцию к снижению, тем сильнее выраженному, чем меньше значение  $\lambda_{\max}$ . Кривые 4 и 5, соответствующие довольно большим значениям  $\lambda_{\max}$ , равным 4,0 и 6,0 отн. ед. соответственно, по крайней мере в пределах рисунка, спадают монотонно, а остальные кривые испытывают осцилляции, период которых по мере уменьшения  $\lambda_{\max}$  также уменьшается. Особыми осцилляциями отличается кривая 1, соответствующая минимальному из рассмотренного интервала значению  $\lambda_{\max} = 0,1$  отн. ед.

**Замечание.** Заметим, что осцилляции кривой 1 настолько велики, что коэффициент отражения в точках  $L = 2,25$  отн. ед. и  $3,04$  отн. ед. принимает нулевые значения. В то же время, в этой области при малых изменениях длины структуры (в пределах 3–5%) коэффициент отражения может меняться от величины, близкой к нулю, до значе-

ния 0,3 отн. ед., то есть на порядок и более. Оба эти обстоятельства могут представлять интерес для практических приложений. Более подробно этот вопрос требует отдельной разработки.

Рассмотрим теперь, как характер спада кривых связан с заданной минимальным волновым числом максимальной длиной волны.

Для характеристики спада введем «шкалу уровней» коэффициента отражения, отсчитываемую вниз от максимального значения коэффициента  $R_{e0}$  при  $L = 0$  отн. ед. На рис. 8.3 такая шкала приведена за правым краем рисунка. Шаг или одно деление шкалы соответствует  $0,1R_{e0}$ . То есть на каждом шаге вниз коэффициент отражения уменьшается на 10% от начального значения.

Рассмотрим уровень  $0,9R_{e0}$ . Соответствующая этому уровню на рис. 8.3 горизонтальная точечная линия пересекает кривые 5, 4, 3, 2, 1 в точках Е, D, С, В, А соответственно.

Кривая 5, соответствующая длине волны  $\lambda_{\max} = 6,0$  отн. ед., пересекает линию, соответствующую  $0,9R_{e0}$ , в точке Е. Обозначим горизонтальную координату точки Е через  $L_c(E)$ . Можно видеть, что  $L_c(E) = 3,25$  отн. ед., Эта величина близка к половине длины волны ( $\lambda_{\max}/2 = 3,0$  отн. ед.). Более точно половина длины волны соответствует около 9% отклонения от  $R_{e0}$ . Таким образом, с определенной степенью точности (порядка 5%) можно считать, что критерием отклонения коэффициента отражения  $R_e$  от максимального значения  $R_{e0}$  в пределах 10% является соотношение

$$L < \frac{\lambda_{\max}}{2}. \quad (8.24)$$

Это соотношение определяет верхний предел длины структуры, при котором отклонение не превышает 10%. То есть для отклонения менее 10% длина структуры должна быть меньше половины максимальной длины волны.

Кривая 4 пересекает линию  $0,9R_{e0}$  в точке D, соответствующей  $L_c = 2,2$  отн. ед. Эта кривая построена при длине волны  $\lambda_{\max} = 4,0$  отн. ед., так что и здесь отклонение в 10% требует, чтобы длина структуры была меньше половины максимальной длины волны.

Легко проверить, что такое же соотношение имеет место для кривых 3, 2, 1 (точки С, В, А). Таким образом, для отклонения меньше 10% требуется, чтобы длина структуры была меньше половины максимальной длины волны.

Вернемся к кривой 5 ( $\lambda_{\max} = 6,0$  отн. ед.) и рассмотрим отклонение на 4%, то есть при  $R_e = 0,96R_{e0}$ . Такому отклонению соответствует точка К. При этом длина структуры, соответствующая этой точке, равна  $L_c(K) = 2,0$  отн. ед., что близко к величине  $\lambda_{\max}/3$ . То есть это отклонение требует, чтобы длина структуры была меньше  $0,3\lambda_{\max}$ .

Аналогично можно видеть, что отклонение кривой 5 на 1%, то есть при  $R_e = 0,99R_{e0}$  соответствует точке Н, для которой длина структуры равна  $L_c(H) = 1,0$  отн. ед., то есть в этом случае длина структуры должна быть меньше  $0,17\lambda_{\max}$  (как  $\lambda_{\max}/L_c$ ).

### 8.5.1. Уровень отклонения коэффициента отражения от максимального значения

Для удобства обращения введем особый параметр — уровень отклонения, определяющий, насколько коэффициент отражения отклоняется от максимального значения:

$$B_e = \frac{R_{e0} - R_e}{R_{e0}}. \quad (8.25)$$

Так, например, для кривой 5 на рис. 8.3 (то есть при  $\lambda_{\max} = 6,0$  отн. ед.) при  $R_{e0} = 0,7785$  и  $R_e = 0,9R_{e0} = 0,7007$  (точка Е) получаем:  $B_e = 0,10$  или 10%. При этом  $L_c = 3,25$  отн. ед. Для кривой 3 (то есть при  $\lambda_{\max} = 2,0$  отн. ед.) при  $R_e = 0,7R_{e0} = 0,5449$  отн. ед. (точка Г) имеем  $B_c = 0,30$  отн. ед. или 30%. При этом  $L_c = 1,90$  отн. ед.

Если задано отклонение  $B_c$ , то соответствующее значение  $R_e$  определяется формулой

$$R_e = (1 - B_c)R_{e0}. \quad (8.26)$$

Задание отклонения  $B_c$  при известной максимальной длине волны  $\lambda_{\max}$  однозначно определяет допустимую длину структуры  $L_c$ . Для пояснения такого положения обратимся к рис. 8.4, где показаны зависимости длины структуры  $L_c$  от максимальной длины волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующие различным значениям отклонения  $B_c$ . Точки на рисунке построены путем машинного эксперимента из кривых, приведенных на рис. 8.3. Буквенные обозначения точек — те же, что на рис. 8.3. Схема определения значений  $L_c$  показана на врезке. Используется какая-либо кривая зависимости  $R_e$  от  $L$  из числа показанных на рис. 8.3. Из точки, соответствующей заданному значению  $R_e$  проводится горизонтальная линия до пересечения с кривой  $R_e(L)$  в точке М. Из точки М опускается перпендикуляр на горизонтальную ось, что и дает требуемое значение  $L_c(M)$ . Таким же образом определяются остальные значения  $L_c$ . Ввиду прозрачности построения далее для упрощения рисунка обозначения точек в круглых скобках при  $L_c$  опускаются.

Поясним получение некоторых точек на примерах.

Пусть  $\lambda_{\max} = 6,0$  отн. ед. Этой длине волны на рис. 8.3 соответствует кривая 5. Зададим отклонение  $B_e = 0,10$  отн. ед. По формуле (8.26) определяем  $R_e = 0,9R_{e0}$ . Пересечению кривой 5 с горизонтальной точечной линией при  $R_e = 0,9R_{e0}$  на рис. 8.3 соответствует точка Е. Опуская из нее перпендикуляр на горизонтальную ось, получаем  $L_c = 3,25$  отн. ед. На рис. 8.4 длине волны  $\lambda_{\max} = 6,0$  отн. ед. и величине  $L_c = 3,25$  отн. ед. соответствует точка, обозначенная здесь также через Е.

Положим теперь  $\lambda_{\max} = 2,0$  отн. ед. Этой длине волны на рис. 8.3 соответствует кривая 3. Зададим отклонение  $B_e = 0,30$  отн. ед. По формуле (8.26) определяем  $R_e = 0,7R_{e0}$ . Пересечению кривой 3 с горизонтальной точечной линией при  $R_e = 0,7R_{e0}$  на рис. 8.3 соответствует точка Г. Опуская из нее перпендикуляр на горизонтальную ось, получаем  $L_c = 1,90$  отн. ед. На рис. 8.4 длине волны  $\lambda_{\max} = 2,0$  отн. ед.



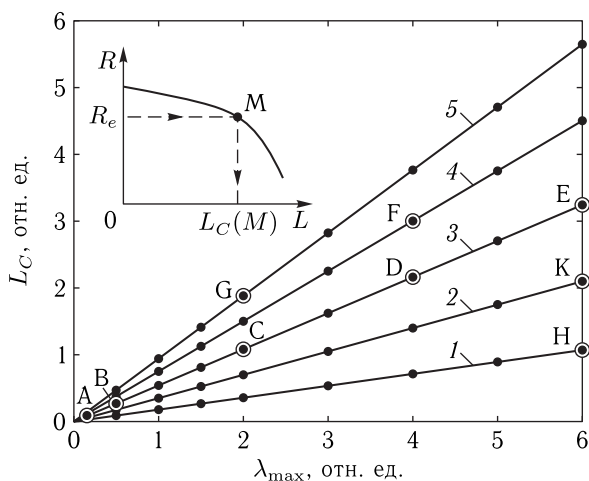


Рис. 8.4. Зависимости длины структуры  $L_c$  от максимальной длины волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующие различным значениям отклонения  $B_e$ : 1 —  $B_e = 0,01$  отн. ед. (то есть  $R_e = 0,99R_{e0}$ ); 2 —  $B_e = 0,04$  отн. ед. (то есть  $R_e = 0,96R_{e0}$ ); 3 —  $B_e = 0,10$  отн. ед. (то есть  $R_e = 0,9R_{e0}$ ); 4 —  $B_e = 0,20$  отн. ед. (то есть  $R_e = 0,8R_{e0}$ ); 5 —  $B_e = 0,30$  отн. ед. (то есть  $R_e = 0,7R_{e0}$ )

и величине  $L_c = 1,90$  отн. ед. соответствует точка, обозначенная здесь также через  $G$ .

Остальные точки получаются аналогичным образом.

Теперь на рис. 8.4 остается соединить между собой точки, получаемые при одном и том же значении отклонения. Так, отклонению  $B_e = 0,10$  отн. ед. соответствуют точки  $E, D, C, B, A$ , то есть те же, что на рис. 8.3 соответствуют  $R_e = 0,9R_{e0}$ . Соединяя эти точки, получаем кривую 3. Видно, что эта кривая представляет собой прямую линию. Аналогично для отклонения  $B_e = 0,30$  отн. ед. получаем кривую 5, проходящую через точку  $G$ . Эта кривая также является прямой линией. Подобным же образом для отклонения  $B_e = 0,20$  отн. ед. получаем кривую 4, для отклонения  $B_e = 0,01$  отн. ед. — кривую 1, для отклонения  $B_e = 0,04$  отн. ед. — кривую 2. Из рисунка видно, что все они являются прямыми линиями, выходящими из начала координат. Эти прямые линии можно описать с помощью простой формулы

$$L_c = q_c \lambda_{\max}, \quad (8.27)$$

где  $q_c$  — «угловой» параметр, играющий роль углового коэффициента в приведенных на рис. 8.4 зависимостях. На рис. 8.5 приведена зависимость углового параметра  $q_c$  от параметра отклонения  $B_e$ , построенная по данным рис. 8.4.

Из рисунка видно, что угловой параметр по мере увеличения параметра отклонения также возрастает, однако тем медленнее, чем откло-

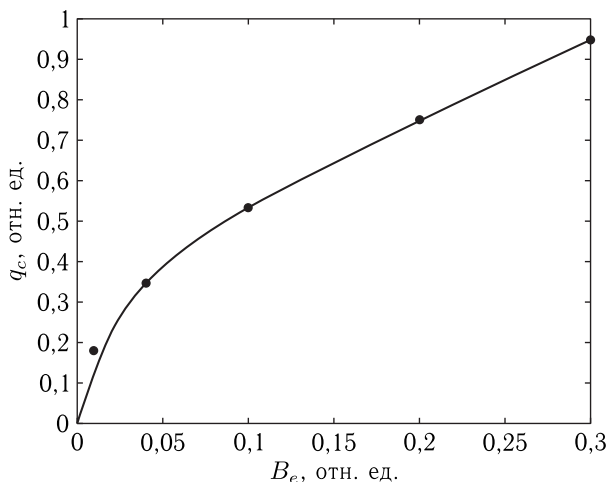


Рис. 8.5. Зависимость углового параметра  $q_c$  от параметра отклонения  $B_e$ , построенная по данным рис. 8.4

нение больше. Такой характер зависимости  $q_c$  от  $B_e$  наглядно прослеживается из рис. 8.4. В самом деле, все кривые 1–5 распределены по углу довольно равномерно, однако параметр отклонения между кривыми 1 и 2 меняется от 0,01 до 0,04 отн. ед., то есть всего на 0,03 отн. ед., тогда как между кривыми 4 и 5 он меняется от 0,20 до 0,30 отн. ед., то есть на 0,10 отн. ед., что более чем в три раза больше, чем в первом случае. Таким образом, один и тот же интервал по углу при малых значениях  $B_e$  достигается быстрее, чем при больших, вследствие чего зависимость  $q_c$  от  $B_e$  на рис. 8.5 возрастает сначала круто, а потом ее рост замедляется.

### 8.5.2. Интерпретация линейного характера зависимости длины структуры от максимальной длины волны

Как видно из рис. 8.4 зависимости длины структуры  $L_c$  от максимальной длины волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующие различным значениям отклонения  $B_e$ , имеют линейный характер. Покажем, что линейность такой зависимости с точностью до постоянного коэффициента обусловлена геометрическим подобием кривых, приведенных на рис. 8.3. В самом деле, обратимся к рис. 8.6, где приведены три характерные кривые 1, 2 и 3, выделенные из рис. 8.3. Общий масштаб и цифровые обозначения кривых — те же, что на рис. 8.3.

Проследим за точками максимумов и минимумов на кривых рис. 8.6. Можно видеть, что точка А, соответствующая первому максимуму кривой 1, лежит по высоте на том же уровне, что и точка В, соответствующая первому максимуму кривой 2, а также точка С, соответствующая также первому максимуму кривой 3. Точка D, соответствующая

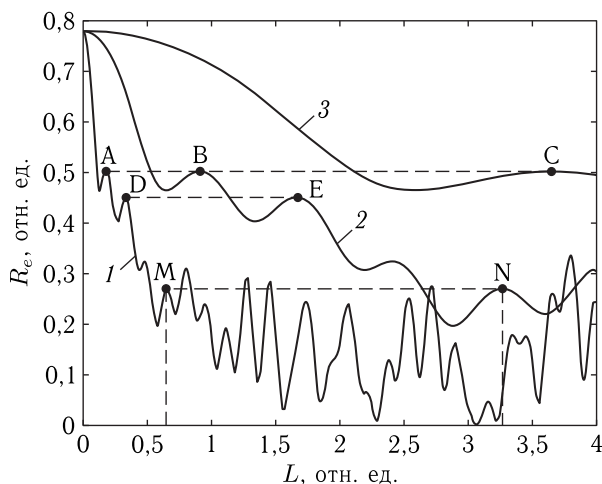


Рис. 8.6. Зависимости коэффициента отражения от длины структуры при различных значениях максимальной длины волны. 1 —  $\lambda_{\max} = 0,1$  отн. ед.; 2 —  $\lambda_{\max} = 0,5$  отн. ед.; 3 —  $\lambda_{\max} = 2,0$  отн. ед. (фрагмент из рис. 8.3)

второму максимуму кривой 1, лежит на том же уровне, что и точка E, соответствующая второму максимуму кривой 2. Подобные соотношения имеют место и для всех остальных экстремумов всех трех кривых, приведенных на этом рисунке. То есть получается, что при сжатии влево кривой 2 она в конце концов совпадет с кривой 1, а сжатие кривой 3 также приведет к ее совпадению с той же кривой 1. Для рассмотрения требуемого коэффициента сжатия обратимся к точкам M и N, соответствующим четвертому максимуму кривых 1 и 2. Можно видеть, что точка M соответствует  $L(M) = 0,65$  отн. ед., а точка N — значению  $L(N) = 3,25$  отн. ед. Отношение между  $L(N)$  и  $L(M)$  равно  $L(N)/L(M) = 5,0$ . В то же время, согласно данным, приведенным в подписи к рис. 8.3, кривая 1 построена при  $\lambda_{\max} = 0,1$  отн. ед., а кривая 2 — при  $\lambda_{\max} = 0,5$  отн. ед., то есть отношение между принятыми при построении значениями  $\lambda_{\max}$  тоже равно 5,0. Таким образом, видно, что сжатие кривой 2 относительно кривой 1 происходит точно в 5 раз. Рассмотрение других кривых и точек на них приводит к тем же результатам.

Таким образом, можно считать, что все кривые, приведенные на рис. 8.3, с точностью до сжатия между собой геометрически подобны, а коэффициент сжатия равен отношению максимальных длин волн соответствующих кривых. При этом любое заданное значение отклонения  $B_e$  соответствует горизонтальному уровню на рис. 8.3, при котором коэффициент отражения не меняется, а величина  $L_c$  определяется степенью сжатия кривых, которая пропорциональна максимальной длине волны. То есть, если максимальная длина волны  $\lambda_{\max}$

меняется, например, в  $n$  раз, то и длина  $L_c$  меняется в то же число  $n$  раз, что и определяет линейный характер зависимостей  $L_c$  от  $\lambda_{\max}$ , приведенных на рис. 8.4.

### 8.6. Коэффициент прохождения при изменении длины структуры

Предыдущие разделы посвящены исследованию коэффициента отражения. Однако метод пересчета амплитуд позволяет найти также коэффициент прохождения в соответствии с формулой (8.13). На рис. 8.7 показаны зависимости коэффициента прохождения от длины структуры, построенные при тех же значениях максимальной длины волны, что и на рис. 8.3.

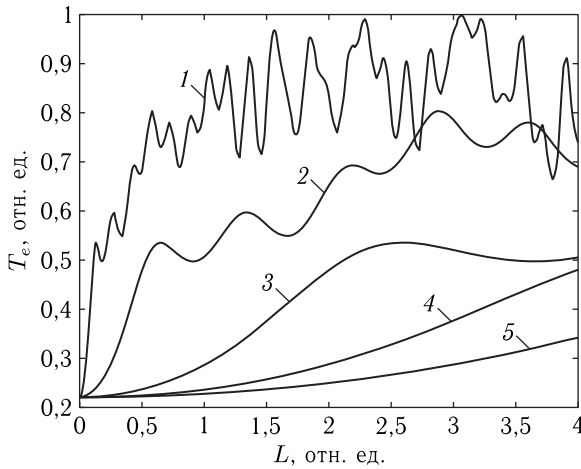


Рис. 8.7. Зависимости коэффициента прохождения от длины структуры при различных значениях максимальной длины волны. Цифровые обозначения кривых — те же, что на рис. 8.3. 1 —  $\lambda_{\max} = 0,1$  отн. ед.; 2 —  $\lambda_{\max} = 0,5$  отн. ед.; 3 —  $\lambda_{\max} = 2,0$  отн. ед.; 4 —  $\lambda_{\max} = 4,0$  отн. ед.; 5 —  $\lambda_{\max} = 6,0$  отн. ед.

Из рисунка видно, что все зависимости по мере увеличения длины структуры возрастают, причем чем сильнее, чем максимальная длина волны меньше. Осцилляции также проявляются сильнее при меньших длинах волны. Можно видеть, что все кривые с точностью до постоянного коэффициента вдоль горизонтальной оси геометрически подобны, то есть переходят друг в друга при соответствующем сжатии или растяжении вдоль этой оси. Рисунок в целом является зеркальным отражением рис. 8.3 в горизонтальной оси на уровне 0,5 отн. ед., так что все свойства приведенных зависимостей с точностью до отражения совпадают со свойствами коэффициента отражения, поэтому более подробно далее не рассматриваются.

### 8.7. Отражение, прохождение и поглощение в диссипативной среде

В предыдущих разделах рассматривалось отражение и прохождение волны в случае отсутствия диссипации во всех средах структуры. Рассмотрим теперь, что происходит с этими явлениями в среде, обладающей диссипацией. Согласно общим положениям теории распространения волн [130, стр. 138, форм. (4.8)–(4.9)], [56, стр. 17–20, форм. (1.36)–(1.40)], диссипацию в среде можно описать путем введения в рассмотрение комплексного волнового числа, мнимая часть которого будет описывать обусловленное затуханием изменение амплитуды волны в процессе ее распространения.

Будем рассматривать коэффициенты отражения  $R_e$ , прохождения  $T_e$  и поглощения  $A_e$  в зависимости от длины структуры. При расчете  $R_e$  и  $T_e$  будем использовать пересчет амплитуд (8.10), (8.11) в сочетании с формулами (8.12), (8.13), а для расчета  $A_e$  используем формулу (8.14). Для подробного выявления характера зависимостей, в том числе их осцилляций, а также для удобства сравнения с предыдущими результатами возьмем принятое выше значение максимальной длины волны  $\lambda_{\max} = 0,1$  отн. ед.

Будем рассматривать волновое число в виде

$$k = \eta - i\xi, \quad (8.28)$$

где его составляющие  $\eta$  и  $\xi$  — действительные и положительные.

Для расчета будем использовать базовый набор волновых чисел  $k_{bn}$  с коэффициентом  $g_c = 62,8319$ , представленный в пятом столбце таблицы № 1 (раздел 8.2.1), который даст компоненту волнового числа  $\eta$  в соответствии с формулой (8.17). В отсутствие диссипации компонента  $\xi$  равна нулю. Для описания диссипации, то есть в случае  $\xi \neq 0$ , введем во все волновые числа одну и ту же компоненту  $\xi = 0,1$  отн. ед.

Полученные зависимости коэффициентов отражения  $R_e$ , прохождения  $T_e$  и поглощения  $A_e$  от длины структуры  $L$  представлены на рис. 8.8.

На рис. 8.8, а кривые 1 и 2 получены без учета диссипации и приведены здесь для сравнения. Видно, что кривая 1 совпадает с кривой 1 на рис. 8.3, а кривая 2 — с кривой 1 на рис. 8.7. Видно, что эти кривые являются зеркальным отражением друг друга в линии половинного возможного уровня, показанной точечной линией на рисунке. Кривая 3, построенная в соответствии с формулой (8.14) тождественно равна нулю, то есть совпадает с нижней горизонтальной осью рисунка.

На рис. 8.8, б кривая 1, соответствующая коэффициенту отражения, спадает примерно в такой же степени, как и кривая 1 на рис. 8.8, а, однако здесь амплитуда осцилляций, начиная с длины структуры  $L=0,5$  отн. ед., уменьшается, причем тем сильнее, чем длина структуры больше.

Проверка показывает, что в пределе, то есть при  $L \rightarrow \infty$ , величина  $R_e$  стремится к нулю, однако после довольно быстрого спада в пре-

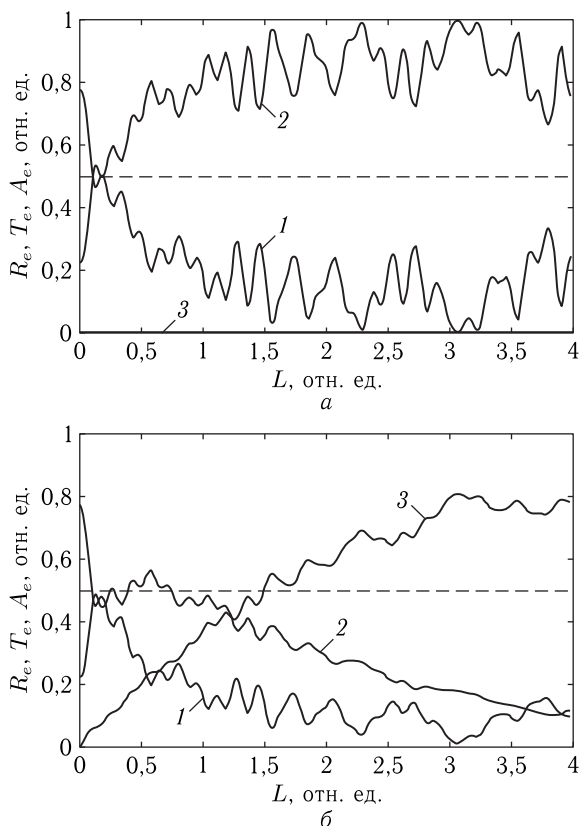


Рис. 8.8. Зависимости коэффициентов отражения 1, прохождения 2 и поглощения 3 от длины структуры в отсутствие диссипации (а) и при ее наличии (б). Параметры:  $\lambda_{\max} = 0,1$  отн. ед.,  $\eta = k_{bn}g_c$ , где  $g_c = 62,8319$ . а —  $\xi = 0$  отн. ед.; б —  $\xi = 0,1$  отн. ед. Горизонтальная пунктирная линия проведена на середине возможного интервала изменения коэффициентов (на уровне 0,5 отн. ед.)

делах  $L$  порядка 1,0 отн. ед., стремление к нулю сильно замедляется. Кривая проходит через несколько убывающих по амплитуде осцилляций неправильной формы, а достигает более или менее устойчивой величины 0,001 отн. ед. только при длине структуры порядка 140 отн. ед.

Кривая 2, соответствующая коэффициенту прохождения, вместо того, чтобы идти вверх, как кривая 2 на рис. 8.8, а, также вблизи уровня  $L = 0,5$  отн. ед. поворачивает вниз, устремляясь к нулю. Здесь стремление к нулю происходит значительно быстрее, чем у кривой 1 для отражения, так что величина 0,001 отн. ед. достигается при длине структуры порядка 12 отн. ед.

Кривая 3 соответствует коэффициенту поглощения. В отличие от рис. 8.8, а, где поглощение отсутствует, здесь оно растет почти

линейно вплоть до длины структуры около 3,0 отн. ед., откуда рост кривой постепенно замедляется, переходя в насыщение. Быстрый рост при малой длине структуры происходит в основном за счет уменьшения прохождения, то есть в этой области волна скорее поглощается, чем проходит. Отражение в этой области, после начального некоторого спада до  $L = 1,0$  отн. ед., хотя и осциллирует и слегка снижается, но меняется довольно мало. Таким образом, в этой области (от нуля до 3,0 отн. ед.) поглощение, почти не меняя отражения, значительно препятствует прохождению.

При увеличении длины структуры более 3,0 отн. ед. поглощение значительно преобладает, как над прохождением, так и над отражением. Дальше уже почти вся энергия распространяющейся волны поглощается и на долю отражения и особенно прохождения ничего не остается. При этом коэффициент поглощения стремится к единице, то есть в пределе вся волна, что падает на структуру, только поглощается, и ничего из нее не отражается и не проходит.

В качестве причины резкого различия в крутизне спада кривых 1 и 2 на рис. 8.8, б можно полагать различие в локализации процессов отражения и прохождения. В самом деле, для довольно эффективного отражения достаточно небольшого слоя вблизи начальной поверхности структуры, а прохождение происходит по всей ее длине. При этом увеличение длины структуры к отражению почти ничего не добавляет, тогда как на прохождении сказывается весьма значительно, прямо пропорционально длине структуры.

Резкое различие в крутизне спада кривых 1 и 2 на рис. 8.8, б выявляется наиболее наглядно в большом интервале изменения длины структуры. Обратимся к рис. 8.9, где эти зависимости показаны при

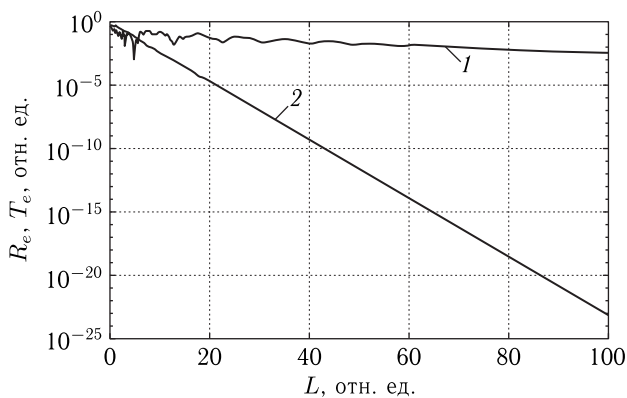


Рис. 8.9. Зависимости коэффициента отражения 1 и прохождения 2 в диссипативной среде от длины структуры в большом интервале ее изменения. Масштаб по вертикальной оси — логарифмический. Все параметры — те же, что на рис. 8.8

изменении  $L$  от нуля до 100 отн. ед. Для большей наглядности по вертикальной оси использован логарифмический масштаб.

Из рисунка видно, что обе зависимости  $R_e$  и  $T_e$  от  $L$  выглядят как прямые линии, идущие из нулевой точки вниз с угловыми коэффициентами  $2 \cdot 10^{-5}$  и  $1 \cdot 10^{-25}$  соответственно. Можно полагать, что линейный характер обеих зависимостей, проявляющийся в логарифмическом масштабе, связан с экспоненциальным характером затухания волн, распространяющихся в структуре с диссипацией.

### 8.8. Отражение, прохождение и поглощение в среде с отрицательной диссипацией

В предыдущем разделе рассмотрено распространение волн в среде с положительной диссипацией, то есть обладающей поглощением. В то же время, существуют среды, где диссипация меняет знак, то есть становится отрицательной. Такая среда является активной [5, стр. 775], так что распространяющаяся в ней волна испытывает усиление, а при наличии положительной обратной связи возможна автогенерация [5, стр. 783–784], что реализуется в лазерах. Согласно классике, необходимым условием самовозбуждения является отрицательное сопротивление колебательного контура [109, стр. 370, форм. (230)]. В случае распространения волн аналогом отрицательного сопротивления является отрицательная диссипация.

В настоящей работе характеристики волны описываются волновым числом, при наличии диссипации имеющим комплексный характер (8.28). Положительной диссипации, обеспечивающей затухание волны, соответствует положительная мнимая составляющая волнового числа  $\xi$ , отрицательной — отрицательная та же величина.

Обратимся к рис. 8.10, где показаны зависимости коэффициентов отражения  $R_e$ , прохождения  $T_e$  и поглощения  $A_e$  от длины структуры  $L$  при отрицательной диссипации, определяемой значением  $\xi = -0,1$  отн. ед.

Из рис. 8.10, *а* видно, что коэффициент отражения  $R_e$ , подобно случаю бездиссипативной среды, сначала слегка убывает, но после  $L_e = 1,2$  отн. ед. начинает возрастать, а при  $L_e = 3,8$  отн. ед. по величине превышает единицу.

Коэффициент прохождения  $T_e$  при этом (рис. 8.10, *б*) сразу от нуля возрастает и становится больше единицы уже при  $L_e = 0,4$  отн. ед. Таким образом, здесь, как и в случае положительной диссипации (рис. 8.8) коэффициент прохождения принимает значение большее единицы значительно раньше, чем то же проделывает коэффициент отражения. Причина такого различия, как и в предыдущем случае, состоит в том, что в отражении участвует главным образом начальная часть структуры, тогда как в прохождении — вся структура в целом, так что усиление волны происходит по всей длине структуры сразу.



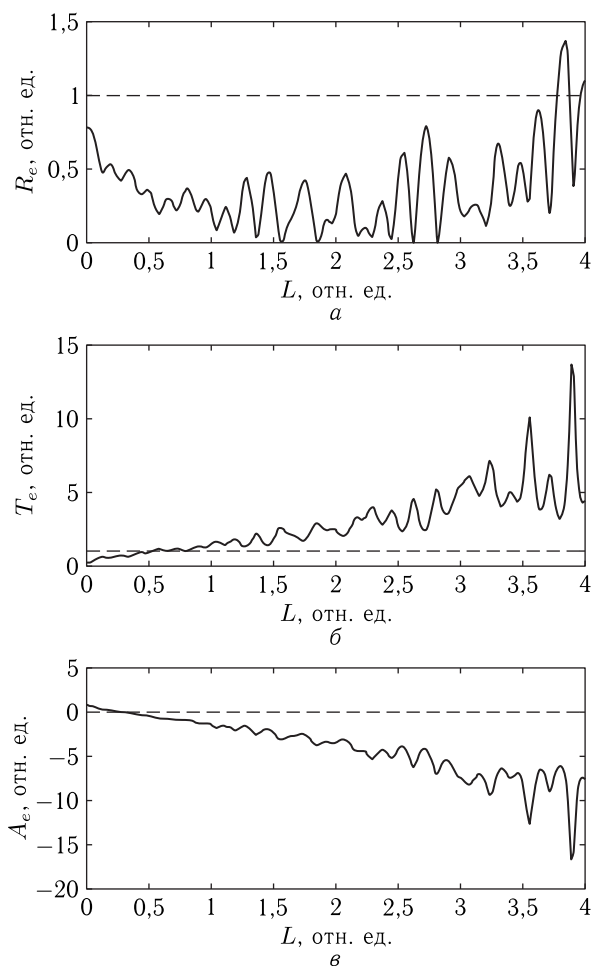


Рис. 8.10. Зависимости коэффициентов отражения  $R_e$  (а), прохождения  $T_e$  (б) и поглощения  $A_e$  (в) от длины структуры  $L$  при отрицательной диссипации. Параметры:  $\lambda_{\max} = 0,1$  отн. ед.;  $\eta = k_{bn}g_c$ , где  $g_c = 62,8319$ ;  $\xi = 0$  отн. ед.;  $\xi = -0,1$  отн. ед. Горизонтальные точечные линии соответствуют максимальным значениям коэффициентов  $R_e$  (а),  $T_e$  (б),  $A_e$  (в) в отсутствие диссипации

Коэффициент поглощения  $A_e$  при этом (рис. 8.10, в), сначала будучи положительным, довольно быстро переходит в отрицательную область и там по мере увеличения  $L_e$  нарастает, так что волна поглощается тем больше, чем более длинный путь она проходит. Такое увеличение поглощения с расстоянием происходит по той же причине, что и рост коэффициента прохождения, так как здесь происходит взаимодействие волны со средой по всей длине структуры.

Заметим, что для расчета коэффициента поглощения используется формула (8.14), заведомо предполагающая выполнение баланса энергий. В случае активной среды дополнительная энергия, обеспечивающая увеличение амплитуды волн при их распространении, поступает от источника питания среды, каковым в случае лазера является источник накачки.

## Выводы по главе 8

Данная глава посвящена применению метода обобщенного импеданса к распространению одномерной волны в многослойной структуре, содержащей барьер ступенчато нарастающего типа. Рассмотрено формирование амплитуды колебаний, а также коэффициентов отражения и прохождения при различной длине структуры. Рассмотрены случаи положительной и отрицательной диссипации волн в структуре.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено применение метода обобщенного импеданса в варианте пересчета амплитуд для расчета коэффициентов отражения, прохождения и поглощения при падении волны на многослойную структуру. В качестве параметра, определяющего распространение волны в отдельных слоях структуры, выбрано волновое число. Послойная конфигурация структуры задана в виде барьера, волновое число в слоях которого распределено ступенчато нарастающим образом.

2. Кратко описан математический аппарат метода импеданса в варианте пересчета амплитуд в применении к ступенчато нарастающей структуре. Приведены выражения, определяющие коэффициенты отражения, прохождения и поглощения. Приведено распределение волновых чисел и длин волн по слоям структуры в конфигурации ступенчато нарастающего барьера. На примере структуры, содержащей 16 слоев, введено базовое распределение волнового числа, при котором волновое число в каждом последующем слое относительно предыдущего возрастает на одну единицу. Введен параметр нарастания барьера, представляющий собой коэффициент, на который умножается базовое значение волнового числа для получения требуемого значения. В качестве основных параметров распространения введены значения максимальной и минимальной длин волны, в первом и последнем слоях структуры соответственно.

3. Рассмотрено формирование амплитуды колебаний при различной длине структуры. Отмечена важность соотношения между максимальной длиной волны и длиной структуры в целом. Показано, что в случае, когда длина структуры меньше половины максимальной длины волны, распределение амплитуды волны по длине структуры является монотонно возрастающим или убывающим. В случае, когда длина структуры больше половины максимальной длины волны, распределение амплитуды по длине структуры приобретает осциллирующий характер,

причем период таких осцилляций соответствует половине максимальной длины волны. Получены коэффициенты отражения и прохождения при крайних значениях волновых чисел в первом и последнем слоях. Отмечена общность полученных выражений, в том числе для случая, когда волновые числа являются комплексными, то есть среда обладает диссипацией.

4. Для среды без диссипации рассмотрен коэффициент отражения при изменении длины структуры. Получены зависимости коэффициента отражения от длины структуры при различных значениях максимальной длины волны. Отмечено, что при стремлении длины структуры к нулю коэффициент отражения при любой длине волны стремится к единице, определяемой значениями волновых чисел в первом и последнем слоях структуры. Показано, что по мере увеличения длины структуры коэффициент отражения убывает тем скорее, чем больше максимальная длина волны. При этом спад коэффициента отражения имеет осциллирующий характер с периодом тем меньшим, чем максимальная длина волны меньше.

5. Рассмотрено падение коэффициента отражения на различных уровнях по абсолютной величине. Показано, что уменьшение коэффициента отражения на 10% от начального значения происходит тогда, когда длина структуры становится порядка половины максимального значения длины волны. Отмечено, что это условие является критерием, определяющим верхний предел длины структуры, при котором величина спада коэффициента отражения не превышает 10%. Для общего рассмотрения введен параметр — уровень отклонения, определяющий, насколько коэффициент отражения отклоняется от максимального значения.

6. Исследованы зависимости длины структуры от максимальной длины волны, соответствующие различным значениям уровня отклонения коэффициента отражения от максимального значения. Показано, что все такие зависимости, выходя из начала координат, представляют собой прямые линии, угловой коэффициент которых с увеличением уровня отклонения также увеличивается, однако тем медленнее, чем отклонение больше. Представлена интерпретация линейного характера зависимости длины структуры от максимальной длины волны. Показано, что все зависимости коэффициента отражения от длины структуры, с точностью до сжатия по горизонтальной оси, между собой геометрически подобны, а коэффициент сжатия равен отношению максимальных длин волн соответствующих зависимостей.

7. Рассмотрено изменение коэффициента прохождения волны при изменении длины структуры. Показано, что в отсутствие диссипации зависимость коэффициента прохождения от длины структуры является зеркальным отражением подобной зависимости для коэффициента отражения на уровне половины от единичного значения.

8. Рассмотрено отражение, прохождение и поглощение волны в ступенчато нарастающей структуре, слои которой обладают положительной

диссипацией. Отмечено, что в диссипативной среде волновое число является комплексным, причем мнимая часть такого числа соответствует уровню диссипации. Показано, что в этом случае среда становится поглощающей, причем коэффициент поглощения по мере увеличения длины структуры возрастает. Коэффициенты отражения и прохождения убывают, причем уменьшение коэффициента прохождения происходит значительно быстрее, чем уменьшение коэффициента отражения. Отмечено, что причиной различия скорости спада коэффициентов отражения и прохождения является формирование отражения преимущественно в начальных слоях структуры, тогда как формирование прохождения происходит по всей длине структуры от начала до ее конца.

9. Рассмотрено отражение, прохождение и поглощение в среде с отрицательной диссипацией. Отмечено, что для реализации отрицательной диссипации мнимая часть волнового числа должна иметь знак, противоположный знаку при положительной диссипации. В качестве примеров сред с отрицательной диссипацией приведены активные среды, используемые в лазерах. Показано, что по мере распространения волны в такой среде ее амплитуда нарастает, причем коэффициент отражения нарастает значительно медленнее, чем коэффициент прохождения, причиной чего является различие в степени локализации отражения и прохождения, подобное таковому при положительной диссипации. Показано, что коэффициент поглощения становится отрицательным и по мере увеличения длины структуры по абсолютной величине возрастает, причем скорость роста близка к скорости нарастания коэффициента прохождения. Отмечено, что такое сходство обусловлено распределением как прохождения, так и поглощения по всей длине структуры. Отмечено, что в рамках сохранения баланса энергий нарастание отражения, прохождения и поглощения при увеличении длины структуры требует поступления энергии от дополнительного источника, каковым в случае лазера является источник накачки.

## Глава 9

# **ОПРЕДЕЛЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ИМПЕДАНСА КРИТЕРИЯ ПРИМЕНИМОСТИ СТУПЕНЧАТОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ**

Глава посвящена определению корректности применения ступенчатого приближения для расчета коэффициентов отражения, прохождения и поглощения при падении волны на линейно-неоднородную структуру. На основе линейного нарастания волнового числа от начальной до конечной точек структуры сформировано ступенчатое приближение неоднородности. Получено критическое значение волнового числа, определяющее корректность приближения, выше которого дальнейшее увеличение дробности структуры к повышению точности приближения не приводит.

В главе частично использован материал работы [106]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### **9.1. Обоснование необходимости получения критерия применимости ступенчатого приближения**

Важнейшей задачей исследования распространения волн через неоднородные структуры, особенно со сложным характером неоднородности [24], является получение коэффициентов отражения и прохождения по энергии, характеризующие структуру в целом [3, стр. 85–87]. Традиционным приемом здесь является представление неоднородной среды в виде слоистой структуры, в пределах каждого слоя которой параметры среды остаются однородными [2, 3, 24, 127]. В большинстве практических случаев рассматривается падение волны на небольшое число слоев, как правило, не более двух-трех, после чего указывается на возможность распространения применяемого аппарата на произвольное число слоев. Таким образом, плавная среда заменяется ступенчатой, причем, как правило, ограничения такого приближения подробно не рассматриваются, а просто постулируется, что длина каждого слоя и длина структуры в целом должны быть значительно меньше длины волны [8, стр. 162].

Наиболее общим методом решения задач о распространении волн в слоистых структурах является прямой метод, состоящий в независи-

мом решении волновых уравнений в каждом слое с последующим сшиванием полученных решений на основе граничных условий [1, 56, 57].

Значительная громоздкость применения такого метода для числа слоев более пяти вынуждает использовать методы последовательного пересчета решений из одного слоя в другой по всей структуре. В числе наиболее употребительных здесь следует отметить метод матрицы [1, 3, 58] и метод импеданса [2, 59] (настоящая монография).

В работах [131–133], [1, стр. 364–410] метод матрицы применен для расчета падения волны на наклонный барьер. Предложен алгоритм расчета, удобный для машинной реализации, рассмотрены случаи различной крутизны барьера, выявлены зависимости коэффициентов отражения и прохождения от параметров структуры.

Работы [103–105], а также главы 6–8 настоящей монографии посвящены применению метода импеданса для расчета распространения волн через структуру со ступенчатой неоднородностью. В работах [103], [59] (здесь главы 2–4 и особенно глава 6) на примере одномерной волны введено понятие обобщенного импеданса, характеризующего зависимость амплитуд волн прямого и встречного направлений от координаты с учетом параметров среды и частоты волны. В работе [104] (здесь глава 7) приведен алгоритм расчета отражения и прохождения, состоящий в применении рекуррентных формул последовательного пересчета импедансов и амплитуд. Рассчитаны входные импедансы слоев структуры, а также коэффициенты отражения и прохождения при падении волны на прямоугольный барьер различной высоты и протяженности. В работе [105] (здесь глава 8) методом импеданса в варианте пересчета амплитуд рассмотрено падение волны на ступенчато нарастающий барьер. Выявлена осциллирующая зависимость коэффициента отражения от длины структуры.

Однако ни в одной из перечисленных работ не рассматривалось приближение плавной неоднородности ступенчатой. Ступенчатая неоднородность полагалась заданной и рассматривались параметры распространения волн при произвольном соотношении между длиной структуры, длиной ступеньки (слоя структуры) и длиной волны. В то же время, значительное число практических задач имеет дело именно с плавной неоднородностью (например, температура воды в океане, распространение радиоволн в ионосфере, глубинное исследование биологических тканей и множество других). Поэтому анализ распространения волн в структуре с плавной неоднородностью имеет весьма большое значение.

Настоящая глава призвана в какой-то мере компенсировать отмеченное упущение и рассмотреть возможность приближения плавной неоднородности ступенчатой, причем критерием корректности будет выступать степень дробности, то есть количества ступенек, на которые разбивается общая изначально плавная структура.

Можно считать очевидным, что для получения корректного результата количество ступенек, на которые разбивается исследуемая

структура, должно быть достаточно большим. Так, если, например, желательно приблизить структуру с точностью в 10%, то есть чтобы параметры соседствующих слоев менялись не более чем на эту величину, то уже получается, что количество слоев должно быть равно десяти. Для большей точности количество слоев должно увеличиваться.

Таким образом, можно считать, что прямой метод для решения поставленной задачи не подходит из-за своей громоздкости. Однако методы матрицы и импеданса, позволяющие осуществлять вычисления последовательно для сколь угодно большого числа слоев, по-видимому, являются вполне пригодными.

Авторы настоящей монографии не решаются отдать решающее предпочтение методу матрицы или импеданса. Однако, поскольку в настоящей монографии рассматривается метод импеданса, то авторы далее используют именно этот метод. Впрочем, естественно полагать, что метод матрицы приведет к тем же результатам, то есть значение и формулировка критерия останутся теми же самыми. Проверить такое утверждение, для чего развить подобное предлагаемому здесь получение критерия на основе метода матрицы, после чего сравнить эффективность применения матрицы и импеданса, авторы осмеливаются предложить любознательному читателю в качестве самостоятельной задачи.

## 9.2. Общая геометрия задачи

Общая геометрия задачи показана на рис. 9.1. Структура представляет собой единый слой или «барьер», ограниченный плоскими границами, обозначенными буквами А и В. Ось координат  $Ox$  ориентирована перпендикулярно плоскостям границ слоя. Начало структуры соответствует координате  $x_0$ , конец — координате  $x_N$ . Внутри структуры в целом параметры среды могут плавно меняться произвольным образом. В общем случае слой разбит на множество частичных слоев,

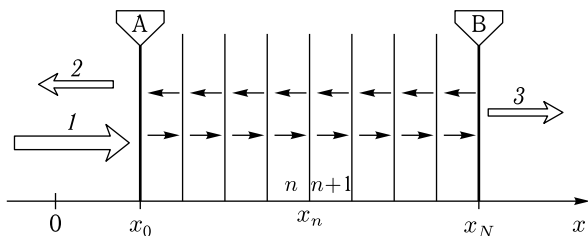


Рис. 9.1. Общая геометрия задачи. Границы структуры обозначены буквами А и В. Внизу показана схема частичных слоев с номерами  $n$  и  $n + 1$ , разделенных границей при координате  $x_n$ . Стрелками внутри слоев показаны волны прямого и обратного направлений. Большие стрелки вне структуры соответствуют волне падающей 1, отраженной 2 и проходящей 3

внутри каждого из которых параметры среды полагаются постоянными. Разбиение структуры на частичные слои и предположение о постоянстве среды внутри каждого такого слоя является «ступенчатым» приближением, применимость которого рассматривается далее. Частичные слои будем считать пронумерованными от нуля до  $N$ , так что поверхность раздела между слоями  $n$  и  $n + 1$  соответствует граница с координатой  $x_n$ .

На структуру со стороны начала координат падает волна 1, отражается от слоя в обратном направлении волна 2, проходит через структуру волна 3. Внутри каждого частичного слоя распространяются две волны прямого (в положительном направлении оси  $Ox$ ) и обратного (в отрицательном направлении той же оси) направлений. Все волны будем считать имеющими гармонический характер, то есть описываемыми экспонентами с мнимым показателем или тригонометрическими функциями типа синуса или косинуса.

### 9.3. Ступенчатое приближение

Будем считать, что параметры среды внутри структуры полностью определяют волновое число волны, распространяющейся в структуре. Другим параметром волны будем считать ее амплитуду. Для гармонических волн такое определение можно считать исчерпывающим. Для амплитуд волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , введем обозначения  $A_n$ , для амплитуд волн, распространяющихся в отрицательном направлении той же оси — обозначения  $B_n$  с соответствующими индексами слоев  $n$ .

На рис. 9.2 показана схема представления линейной неоднородности в виде ступенчатой структуры. За параметр частичных сред считаем волновое число. Составляющие части рисунка сверху вниз иллюстрируют последовательное приближение линейной зависимости волнового числа от координаты (а) ступенчатой зависимостью волнового числа от той же координаты (б, в). Рассмотрим части рисунка более подробно.

На рис. 9.2, а показано распределение волнового числа по длине структуры в случае, когда такое число зависит от координаты линейным образом в соответствии с формулой

$$k = k_0 + \frac{k_N - k_0}{x_N - x_0} x. \quad (9.1)$$

На рис. 9.2, б показано приближение зависимости волнового числа от координаты в виде трех ступенек. Такое приближение соответствует изменению волнового числа в тех же пределах в том же интервале координат, выполненному в виде трех подобных друг другу прямоугольных ступенек. В слое, заключенном между координатами  $x_1$  и  $x_2$ , распространяются две волны: в прямом направлении волна  $A_2$ ,



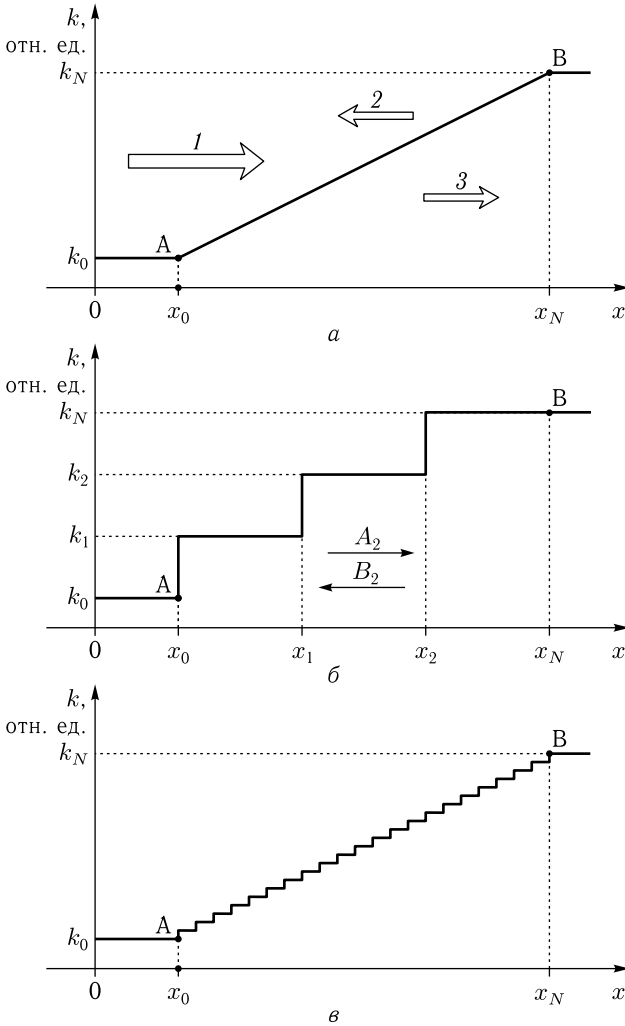


Рис. 9.2. Представление линейной неоднородности в виде ступенчатого приближения: *a* — исходная структура между точками А и В; *б* — разбиение исходной структуры на три ступеньки; *в* — разбиение исходной структуры на 22 ступеньки

в обратном — волна  $B_2$ . В других ступеньках волны распространяются аналогичным образом.

На рис. 9.2, *в* показано разбиение исходной структуры на 22 ступеньки, так что приближение зависимости волнового числа от координаты можно считать значительно более близким, чем при всего трех ступеньках. Волны внутри каждой ступеньки распространяются анало-

гично показанным на рис. 9.2, б. Можно полагать, что с увеличением числа ступенек, то есть с уменьшением их относительного размера, приближение становится все более точным и в пределе стремится к наклонной линии, определяемой формулой (9.1).

### 9.3.1. Схема ступенчатой структуры

В качестве базовой возьмем ту же структуру ступенчато нарастающего барьера, что рассматривалась в работе [105]. Схема структуры, совпадающая с принятой в той же работе, показана на рис. 9.3.

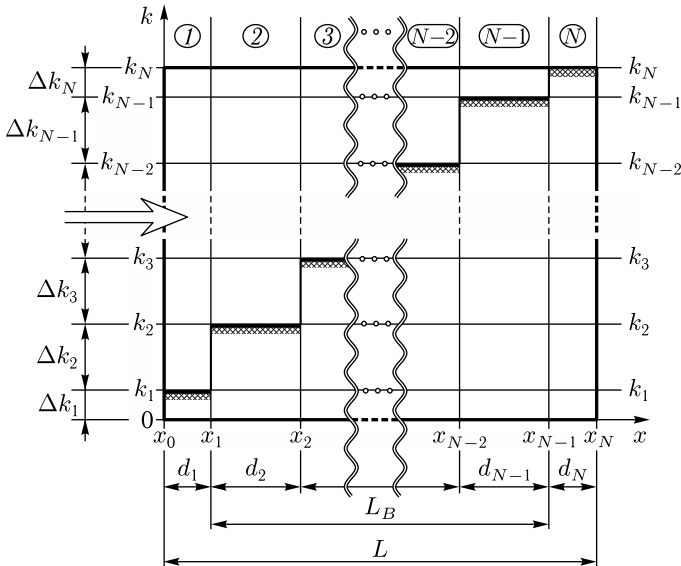


Рис. 9.3. Схема базовой ступенчатой структуры. Вверху в кругах — номера частичных слоев. По горизонтали отложены координаты границ между слоями. По вертикали отложены соответствующие значения волнового числа. Слева стрелкой показано направление падения исходной волны

Приведенная схема совпадает с принятой на рис. 8.1 и здесь повторена для удобства изложения.

Структура содержит  $N$  ступенек или частичных слоев, пронумерованных от 1 до  $N$ . Ось координат  $Ox$  перпендикулярна плоскостям слоев. Границы между слоями имеют координаты от  $x_0$  до  $x_N$ . Длины участков, соответствующих отдельным слоям структуры, определяются по формуле

$$d_n = x_n - x_{n-1}, \quad (9.2)$$

где  $n$  — номер участка, меняющийся от 1 до  $N$ .

Внутри каждого слоя среда является однородной, однако параметры сред в различных слоях могут между собой различаться.

Внутри каждой среды вдоль оси  $Ox$  могут распространяться волны в обоих направлениях. Будем считать заданными для этих волн волновые числа, номера которых установим теми же, что и номера частичных слоев.

Началом структуры будем считать внешнюю сторону первой среды, соответствующую координате  $x_0$ . Концом структуры будем считать внешнюю сторону последней среды, соответствующую координате  $x_N$ .

Будем считать структуру, состоящей из трех основных участков: входного, выходного и барьера между ними. От начала структуры, то есть от координаты  $x_0$  до окончания первой среды, то есть до координаты  $x_1$  — входной участок структуры. На конце структуры, то есть от координаты  $x_{N-1}$  до  $x_N$  — выходной участок структуры. Часть структуры между входным и выходным участками, то есть от координаты  $x_1$  до координаты  $x_{N-1}$  будем называть «барьером» между входным и выходным участками. Этот барьер может состоять из нескольких отдельных сред (слоев), число которых будет определяться конкретными условиями задачи. Полную длину структуры обозначим через  $L$ , а длину барьера — через  $L_B$ .

Параметры входного и выходного участков структуры, то есть их длины и волновые числа распространяющихся в них волн будем считать неизменными, заданными начальными условиями задачи. Параметры составляющих барьер участков будем задавать в соответствии с данными конкретной задачи.

Падающей волной в структуре будем считать волну, распространяющуюся в слое 1 в положительном направлении оси  $Ox$ . Отраженная от структуры волна — в том же слое 1, но распространяющаяся в отрицательном направлении оси  $Ox$ . Проходящей волной будем считать волну, распространяющуюся в слое  $N$  в положительном направлении оси  $Ox$ .

Будем считать, что на обоих концах структуры, то есть при координатах  $x_0$  и  $x_N$  отражение волн того и другого направлений отсутствует.

Для удобства рассмотрения для каждого слоя введем «приращение» волнового числа, равное разности между волновым числом данного участка и предыдущего:

$$\Delta k_n = k_n - k_{n-1}, \quad (9.3)$$

где  $n$  — номер слоя.

#### 9.4. Общие характеристики распространяющихся волн

В структуре распространяются волны прямого и встречного направлений вдоль оси  $Ox$ . Те и другие волны подчиняются одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad (9.4)$$

где  $G$  — волновая функция,  $a$  — фазовая скорость волны.

При гармонической зависимости от времени типа

$$G = Ue^{i\omega t} \quad (9.5)$$

координатная часть этого уравнения принимает вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + k^2 U = 0, \quad (9.6)$$

где

$$k = \frac{\omega}{a} \quad (9.7)$$

— волновое число.

Решение этого уравнения представляет собой две волны — прямую, распространяющуюся в положительном направлении оси  $Ox$ , и обратную, распространяющуюся в отрицательном направлении той же оси. Полное решение имеет вид:

$$U = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \quad (9.8)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные, которые должны быть определены из граничных условий, причем первое слагаемое соответствует прямой волне, второе — обратной.

Далее амплитуды волн прямого направления будем обозначать буквой  $A$  с соответствующим индексом внизу, амплитуды волн обратного направления — буквой  $B$  также с индексом внизу. Таким образом, например,  $A_1$  — амплитуда волны прямого направления в среде  $I$ ,  $A_n$  — амплитуда волны прямого направления в среде с номером  $n$ ,  $B_1$  и  $B_n$  — амплитуды волн обратного направления в тех же средах.

Для дальнейшего рассмотрения будет важен нулевой и обобщенный импеданс распространяющихся волн. Нулевой импеданс в среде с номером  $n$ , согласно [104, форм. (5)], является величиной, обратной к волновому числу в этой среде:

$$Z_{n0} = \frac{1}{k_n}. \quad (9.9)$$

Обобщенный импеданс [103, форм. (26)] в той же среде равен:

$$Z_n = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}}{A_n e^{-ik_n x} - B_n e^{ik_n x}}. \quad (9.10)$$

При расчете будем пользоваться полученными в главе 6 (в работе [103]) рекуррентными формулами (6.105), (6.106) для пересчета амплитуд от конца структуры к ее началу:

$$A_{n-1} = \frac{A_n(Z_{(n-1)0} + Z_{n0}) - B_n(Z_{(n-1)0} - Z_{n0})e_n}{2Z_{n0}} e_{n-1}^{-1}. \quad (9.11)$$

$$B_{n-1} = \frac{-A_n(Z_{(n-1)0} - Z_{n0}) + B_n(Z_{(n-1)0} + Z_{n0})e_n}{2Z_{n0}}. \quad (9.12)$$

Для расчета коэффициентов отражения и прохождения будем использовать приведенные в главе 6 (в работе [103]) формулы (6.124), (6.125):

$$R_e = \left| \frac{B_1(A_1)}{A_1} \right|^2; \quad (9.13)$$

$$T_e = \left| \frac{A_N(A_1)}{A_1} \right|^2 \operatorname{Re} \left( \frac{k_{N0}}{k_{10}} \right). \quad (9.14)$$

При этом коэффициент поглощения [128, 129], в соответствии с законом сохранения энергии, имеет вид (8.14)

$$A_e = 1 - R_e - T_e. \quad (9.15)$$

### 9.5. Базовые распределения волновых чисел

Основной целью является выявление условий применимости ступенчатого приближения. Можно полагать, что с увеличением числа ступенек, то есть по мере увеличения дробности разбиения исходной структуры, точность приближения должна возрастать. Для проверки такого предположения рассмотрим последовательное увеличение дробности разбиения исходной структуры на ступеньки по волновому числу. Используемые далее схемы распределений волновых чисел показаны на рис. 9.4.

В представленных на рис. 9.4 распределениях ступеньки как по координате, так и по волновому числу внутри каждого распределения сохраняются одинаковыми. Некоторые отклонения, в пределах одной ступенчатой единицы, вызваны желанием работать с целыми числами.

Значения волновых чисел в пределах соответствующих распределений приведены в таблице № 1. Все числа приведены в относительных единицах.

Вертикальные столбцы таблицы 9.1, пронумерованные от  $1B$  до  $12B$  соответствуют различным распределениям. Горизонтальные строки таблицы, пронумерованные от  $1S$  до  $16S$  соответствуют порядковым значениям волновых чисел в различных распределениях.

Из таблицы 9.1 видно, что при распределении  $1B$  волновые числа только в пределах первого и последнего слоев (по координатам от  $x_0$  до  $x_1$  и от  $x_{15}$  до  $x_{16}$ ) имеют крайние значения 1 и 16 отн. ед., соответствующие точкам А и В на рис. 9.2, а, тогда как во всех остальных слоях волновые числа равны 8 отн. ед. Такое распределение представлено на рис. 9.4 под номером  $1B$ .

При распределении  $2B$  вся промежуточная часть структуры между первым и последним слоями уже содержит две ступеньки одинаковой длины по 7 отн. ед. с волновыми числами 5 и 11 отн. ед. Такое распределение представлено на рис. 9.4 под номером  $2B$ .

Дальнейшие распределения соответствуют последовательному разбиению внутреннего участка структуры (между  $x_1$  и  $x_{15}$ ) на все более



Таблица 9.1. Базовые распределения волновых чисел

		НОМЕРА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ											
		1B	2B	3B	4B	5B	6B	7B	8B	9B	10B	11B	12B
НОМЕРА СЛЮБЕВ	1S	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2S	8	5	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2
	3S	8	5	4	3	3	3	2	2	2	2	3	3
	4S	8	5	4	3	5	5	4	4	4	4	4	4
	5S	8	5	4	6	5	5	4	4	4	4	5	5
	6S	8	5	8	6	5	7	6	6	6	5	6	6
	7S	8	5	8	6	8	7	6	6	7	6	7	7
	8S	8	5	8	6	8	7	8	7	8	7	8	8
	9S	8	11	8	10	8	9	8	9	8	9	8	9
	10S	8	11	8	10	8	9	10	10	9	10	9	10
	11S	8	11	8	10	11	9	10	10	10	11	10	11
	12S	8	11	12	10	11	11	12	12	12	12	11	12
	13S	8	11	12	13	11	11	12	12	12	12	12	13
	14S	8	11	12	13	13	13	14	14	14	14	13	14
	15S	8	11	12	13	13	13	14	14	14	14	14	15
	16S	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16

### 9.5.1. Критическое значение максимального волнового числа

Рассмотрим теперь, как меняется коэффициент отражения при изменении дробности ступенчатой структуры.

В принятом масштабе относительных единиц базовые значения волнового числа, приведенные в таблице 9.1 и на рис. 9.4, по отношению к полной длине структуры, равной 16 отн. ед., слишком велики. При этом волна в процессе распространения испытывает многократные переотражения, приводящие к сильной изрезанности зависимости коэффициента отражения от длины структуры. Пример результата интерференционного наложения переотраженных волн можно видеть на рис. 9.3 (кривые 1, 2) в работе [105]. Интерференция прекращается тогда, когда длина структуры становится того же порядка, что и длина волны. В настоящей работе длина структуры принята единой, равной 16 отн. ед., так что имеется возможность выбора только длины волны или волнового числа. Резонанс, обеспечивающий интерференционную картину, соответствует возбуждению первой моды, пространственная длина которой определяется половиной длины волны.

Если половина длины волны становится больше длины структуры, то условия для резонанса для такой волны отсутствуют (рис. 9.2, а в работе [105]). Таким образом, все волны, длина которых превышает удвоенную длину структуры, резонансных переотражений не испытывают, так что в образовании изрезанной картины не участвуют. Это обстоятельство накладывает ограничение на минимальную длину волны,

то есть на максимальное волновое число. В рассматриваемой геометрии (рис. 9.2, *a*) максимальное значение волнового числа равно 16 отн. ед., что соответствует длине волны 0,3927 отн. ед. Половина такой длины волны укладывается на полной длине структуры (16 отн. ед.) много раз, что приводит к многочисленным переотражениям волны внутри структуры. Чтобы избежать таких переотражений следует уменьшить максимальное волновое число, для чего введем нормирующий коэффициент  $G$ , заведомо меньший единицы, при котором максимальное волновое число получается равным:

$$k^{(\max)} = k_B^{(\max)} G. \quad (9.16)$$

Величина  $k_B^{(\max)}$  получается как наибольшее значение волновых чисел, достигаемое при любом распределении. Это значение равно 16 отн. ед. (табл. 9.1, рис. 9.4). На рис. 9.5 показаны зависимости коэффициента отражения  $R$  от нормировочного коэффициента  $G$  при различных распределениях волновых чисел. Обозначения распределений соответствуют приведенным на рис. 9.4 и в таблице 9.1.

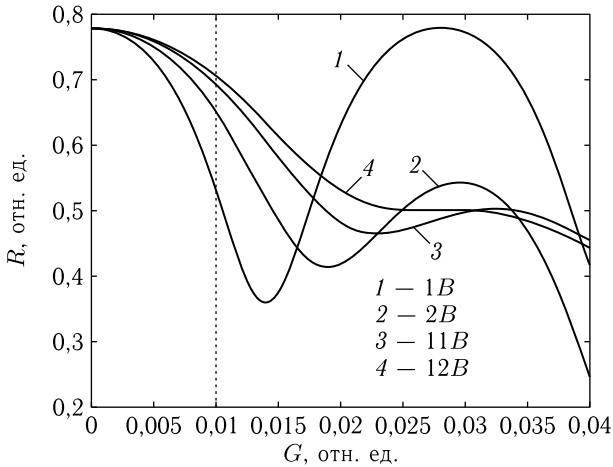


Рис. 9.5. Зависимости коэффициента отражения  $R$  от нормировочного коэффициента максимального волнового числа  $G$  при различных распределениях волновых чисел: 1 — 1B, 2 — 2B, 3 — 11B, 4 — 12B. Кривые получены по формуле (9.13) с учетом (9.11), (9.12) при использовании распределений, приведенных в таблице 9.1

Из рисунка можно видеть, что все зависимости начинаются в одной точке при  $R_{\epsilon 0} = 0,7785$  отн. ед., соответствующей  $k \rightarrow 0$  (раздел 5 в работе [105]). Далее, по мере увеличения параметра  $G$ , то есть величины  $k^{(\max)}$ , зависимости  $R$  от  $G$  при всех распределениях волновых чисел спадают, испытывая определенные осцилляции. Можно ожидать, что увеличение дробности распределения, то есть по мере перехода



от распределения 1В к распределению 12В, значение коэффициента отражения при каждом заданном значении параметра  $G$  должно приходиться к насыщению. Однако, задавая фиксированные значения параметра  $G$  и сопоставляя последовательные значения коэффициента отражения по кривым от 1 до 4, можно видеть, что устойчивое насыщение наблюдается только на начальном участке кривых при  $G \leq 0,01$  отн. ед. Так, при  $G = 0,01$  отн. ед. (вертикальная точечная линия на рис. 9.5) последовательно проходимые по распределениям кривые 1–4 дают значения  $R$  равные 0,55, 0,64, 0,71, 0,72 отн. ед., то есть по мере увеличения дробности распределения коэффициент отражения, монотонно возрастая, стремится к величине 0,72 отн. ед. При  $G = 0,02$  отн. ед. те же значения равны: 0,61, 0,41, 0,42, 0,54 отн. ед., то есть здесь насыщения не наблюдается. При  $G = 0,03$  отн. ед. для  $R$  получаем: 0,77, 0,53, 0,48, 0,48 отн. ед., а для  $G = 0,04$  получаем: 0,43, 0,26, 0,46, 0,45 отн. ед.

В последних трех случаях, то есть при  $G \geq 0,01$  отн. ед. насыщения  $R$  не происходит, так что здесь увеличение дробности ступенчатой структуры к улучшению приближения линейной зависимости к ступенчатой не приводит.

Таким образом, критическим значением максимального волнового числа, при котором приближение достаточно корректно, можно считать величину  $k_c^{(\max)} = 0,16$  отн. ед., что соответствует длине волны 39,27 отн. ед., половина которой равна 19,64 отн. ед. Полная длина структуры равна 16 отн. ед., так что половина критической длины волны эту величину превышает, то есть условия для резонанса, приводящего к изрезанности зависимости  $R$  от длины структуры  $L$ , отсутствуют, что и обеспечивает корректность приближения.

Найдем оценку максимального волнового числа, исходя из условия, чтобы половина соответствующей ему длины волны  $\lambda_c$  была больше длины структуры. Так, полагаем:

$$\frac{\lambda_c}{2} > L. \quad (9.17)$$

Учитывая связь между длиной волны и волновым числом в виде

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (9.18)$$

из (9.17) получаем:

$$k_c^{(\max)} < \frac{\pi}{L}, \quad (9.19)$$

что дает  $k_c^{(\max)} < 0,1963$  отн. ед. что довольно близко соответствует найденному выше эмпирическим путем значению 0,16 отн. ед.

Коэффициент прохождения  $T_e$  в отсутствие диссипации является дополнением коэффициента отражения  $R_e$  до единицы, так что все приведенные оценки остаются прежними. Введение затухания, то есть коэффициента поглощения  $A_e$  в соответствии с соотношением (9.15),

также такого положения не изменяет, то есть критическое значение волнового числа  $k_c^{(\max)}$  остается тем же самым.

### 9.5.2. Степень приближения линейной структуры ступенчатой

Рассмотрим степень приближения линейной структуры ступенчатой более подробно. Сначала обратимся к значениям волнового числа меньшим критического, то есть при  $G \leq 0,01$ . На рис. 9.6 приведены зависимости коэффициента отражения  $R_e$  от номера распределения волновых чисел  $N_B$  при различных значениях нормирующего коэффициента  $G$ .

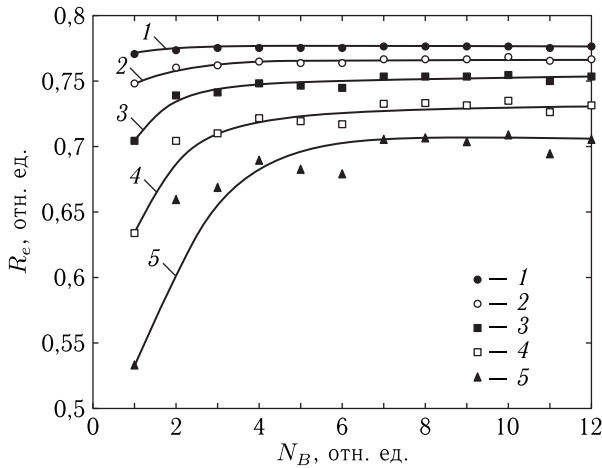


Рис. 9.6. Зависимости коэффициента отражения  $R_e$  от номера распределения волновых чисел  $N_B$  при различных значениях нормирующего коэффициента  $G$ : 1 — 0,002 отн. ед.; 2 — 0,004 отн. ед.; 3 — 0,006 отн. ед.; 4 — 0,008 отн. ед.; 5 — 0,010 отн. ед. Точки — результаты расчета по формуле (9.13) с учетом (9.11), (9.12) при использовании распределений, приведенных в таблице 9.1. Линии проведены, исходя из максимального приближения к точкам

Из рисунка видно, что все зависимости по мере увеличения дробности структуры, то есть при переходе от распределения 1В к распределению 12В, стремятся к насыщению. При этом такое стремление выражено тем сильнее, чем величина параметра  $G$  меньше. Так, раньше всего насыщается кривая 1, для которой  $G = 0,002$  отн. ед., а позже всего — кривая 5, для которой  $G = 0,010$  отн. ед.

Характер всех кривых одинаков: сначала по мере увеличения дробности они нарастают, после чего, начиная с некоторого значения  $N_B$  выходят на горизонтальный участок. Будем считать началом насыщения выход на горизонтальный участок с точностью около 5%. Насыщение соответствует такому распределению ступенек, при котором приближение линейной структуры ступенчатой является достаточно корректным.

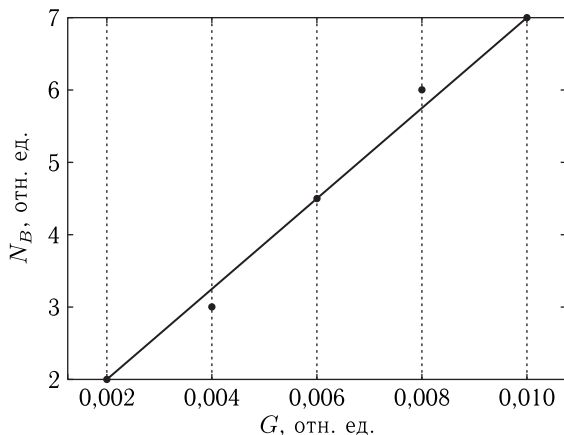


Рис. 9.7. Зависимость номера распределения  $N_B$  от параметра  $G$ , при котором кривые на рис. 9.6 выходят на насыщение. Наклонная прямая построена по формуле (9.20)

Можно видеть, что по мере увеличения параметра  $G$ , то есть максимального значения волнового числа, номер распределения, требуемый для начала насыщения, увеличивается. На рис. 9.7 приведена построенная по данным рис. 9.6 зависимость номера распределения  $N_B$  от параметра  $G$ , при котором кривые на рис. 9.6 выходят на насыщение. Точки соответствуют номерам распределений (с точностью до целых чисел), при которых кривые на рис. 9.6 выходят на горизонтальный участок.

Из рисунка видно, что точки по мере увеличения  $G$  располагаются выше и выше, причем эти точки лежат вблизи прямой линии, определяемой формулой

$$N_B = 0,75 + 625G. \quad (9.20)$$

Таким образом, чем больше максимальное волновое число (формула (9.16)), тем дробность распределения ступенек структуры, требуемая для корректности приближения, должна быть более высокой (то есть, чем максимальное волновое число больше, тем ступенек требуется больше). При этом зависимость между максимальным волновым числом и степенью дробности (то есть требуемым количеством ступенек) является линейной.

Рассмотрим теперь случай, когда значение волнового числа превышает критическое, то есть при  $G \geq 0,01$ . На рис. 9.8 приведены некоторые зависимости, подобные приведенным на рис. 9.6, построенные при  $k_c^{(\max)} \geq k_c^{(\max)}$ . Значения параметра  $G$  для соответствующих кривых приведены в подписи к рисунку.

Из рисунка можно видеть, что кривые по-прежнему остаются монотонными, но теперь их вид значительно изменяется. Кривая 1 (сплош-

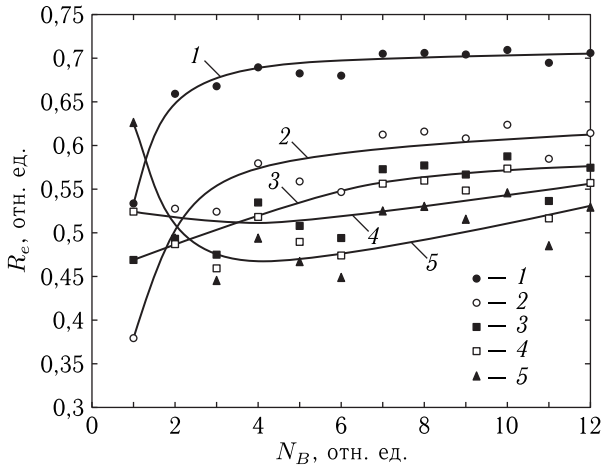


Рис. 9.8. Зависимости коэффициента отражения  $R$  от номера распределения волновых чисел  $N_B$  при различных значениях нормирующего коэффициента  $G$ : 1 — 0,010 отн. ед.; 2 — 0,015 отн. ед.; 3 — 0,017 отн. ед.; 4 — 0,018 отн. ед.; 5 — 0,020 отн. ед. Методика построения — та же, что для рис. 9.6

ные точки) с точностью до масштаба по вертикали совпадает с кривой 5 на рис. 9.6. Кривая 2 (открытые точки) ведет себя еще сходным образом, то есть сначала возрастает, после чего стремится к насыщению, хотя точки при  $N_B \geq 10$  отн. ед. уже испытывают заметный разброс. Кривая 3 (сплошные квадраты), хотя и возрастает, но к насыщению не стремится, что можно видеть из сильного разброса точек уже при  $N_B \geq 5$  отн. ед. Кривая 4 уже не возрастает, а точки (открытые квадраты) испытывают разброс прямо с самого начала, то есть уже при  $N_B \geq 2$  отн. ед. Кривая 5 (сплошные треугольники) с самого начала не возрастает, а убывает, достигает минимума и возрастает с  $N_B \geq 5$  отн. ед. Разброс точек кривой 5 на всем ее протяжении довольно значительный.

Таким образом, корректным приближением линейного роста ступенчатым можно считать только значение максимального волнового числа меньше критического. Вблизи критического значения на практике для достижения корректности (в пределах 5%) достаточно разбиения  $7B$  (то есть из 8 близких по величине ступенек, как это видно из рис. 9.4). Дальнейшее более дробное разбиение к улучшению приближения не приводит, то есть является излишним.

## 9.6. Замечание о других видах неоднородностей

В предыдущих разделах рассмотрено ступенчатое приближение среды, волновое число в которой нарастает линейным образом. Однако из обращения к практическим задачам можно видеть, что линейная

неоднородность является всего лишь частным случаем из всего возможного многообразия неоднородностей. Рассмотрим вкратце, какие возможности здесь имеются для ступенчатого приближения.

Итак, в разделе 9.5.2 были получены два основных правила, выполнение которых необходимо для корректного решения задачи.

Во-первых, при заданной полной длине структуры максимальная длина волны должна быть больше удвоенной длины структуры, что определяет верхнюю границу допустимых частот.

Во-вторых, при условии выполнения первого правила, для достижения корректности (в пределах 5 %) достаточно разбиения структуры на семь ступенек равной высоты и протяженности.

Первое из этих правил безусловно и должно быть выполнено при любом характере неоднородности исходной среды. Очевидность безусловности следует из того, что при его выполнении в пределах структуры в целом укладывается меньше половины самой короткой длины волны, так что резонансные явления, вызывающие осцилляции отражения и прохождения, при этом исключаются.

Второе правило, однако, получено именно из линейного характера изменения волнового числа по длине структуры, так что при отклонении от линейности может нарушаться.

В самом деле, при выполнении первого правила, то есть при задании максимальной величины волнового числа, это число, оставаясь в допустимых пределах, по координате может меняться резким образом. Например, может «скакнуть» сразу на большую величину, причем протяженность скачка будет меньше одной седьмой длины структуры. Или испытать резкий выброс колоколообразного типа с возвращением к прежнему значению, причем длина локализации выброса опять будет меньше восьмой части структуры. Более того, на длине структуры волновое число может испытывать такие скачки и выбросы сколько угодно раз случайным образом.

Можно полагать, что приемлемым выбором размеров ступеньки будет такой, при котором ее протяженность будет в несколько раз меньше длины самого резкого скачка. При сохранении такой длины ступеньки по всей структуре все части структуры будут приближены с достаточной степенью корректности.

Однако, если длина скачка составляет небольшую часть длины структуры, то количество ступенек может получиться очень большим и полный расчет довольно громоздким.

В то же время, разбиение плавных участков на малые ступеньки будет заведомо излишним, так как точность расчета в целом будет определяться именно точностью расчета самого резкого участка.

Поэтому можно полагать, что оптимальным вариантом с точки зрения экономии вычислений при условии сохранения их точности будет изменение длины ступеньки в соответствии со степенью резкости изменения волнового числа.

Покажем на примере, как можно применить ступенчатое приближение в этом случае, для чего обратимся к рис. 9.9, где показана схема такого приближения. В качестве примера выбрана довольно плавная неоднородность, что вызвано стремлением не перегружать рисунок

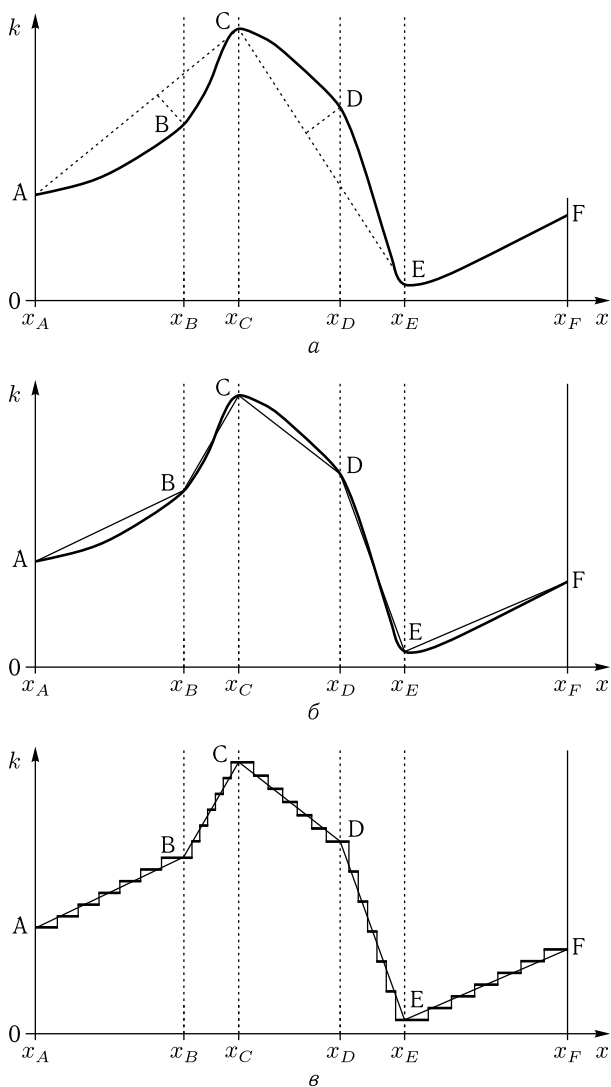


Рис. 9.9. Схема ступенчатого приближения среды с плавной неоднородностью. *a* — исходная неоднородная зависимость волнового числа  $k$  от координаты  $x$  — утолщенная кривая А–F; *б* — приближение исходной неоднородности отрезками прямых; *в* — приближение отрезков прямых ступенчатой структурой

излишними деталями. Заведомо предполагаем, что первое правило корректности выполнено, то есть полная длина структуры в два раза меньше минимальной длины волны для любого значения волнового числа, которое может встретиться в пределах структуры.

Введем необходимые далее обозначения, Прежде всего будем считать, что начало и конец структуры приходятся на координаты  $x_A$  и  $x_F$  соответственно. На рис. 9.9, а показана зависимость волнового числа  $k$  от координаты  $x$ , представленная кривой А–F. Точка А соответствует координате  $x_A$ , точка F — координате  $x_F$ . Кривая имеет максимум в точке С и минимум в точке Е, координаты которых равны соответственно  $x_C$  и  $x_E$ . Между точками А и С кривая имеет выпуклость вниз. Точка кривой, наиболее удаленная от точечной линии АС, обозначена через В. Координата этой точки равна  $x_B$ . Между точками С и Е кривая имеет выпуклость вниз. Точка кривой, наиболее удаленная от точечной линии СЕ, обозначена через D. Координата этой точки равна  $x_D$ . Между точками Е и F кривая тоже имеет выпуклость вниз, однако эта часть кривой настолько близка к прямой линии, что вводить для характеристики ее выпуклости дополнительную точку, по-видимому, нет особенной необходимости.

Через координаты точек В, С, D, Е построены вертикальные пунктирные линии, которые в совокупности с вертикальными линиями, проходящими через концы структуры А и F, разбивают структуру на участки  $(x_A \div x_B)$ ,  $(x_B \div x_C)$ ,  $(x_C \div x_D)$ ,  $(x_D \div x_E)$ ,  $(x_E \div x_F)$ . Крайние точки этих участков соединим прямыми линиями, как показано на рис. 9.9, б. Получаются линии АВ, ВС, CD, DE и EF. Эти линии будем считать приближением исходной кривой отрезками прямых, на каждом из которых число меняется линейным образом.

Положим далее, что для каждого такого прямолинейного участка справедливо второе правило корректности приближения ступеньками, то есть для пятипроцентной точности на каждом участке должно помещаться восемь ступенек. Такое представление прямых линий ступеньками изображено на рис. 9.9, в.

Видно, что самые короткие ступеньки имеют место на участке ВС, где кривая идет наиболее крутым образом. Поскольку длины всех других участков больше длины ВС, то таких коротких ступенек на каждом из них могло бы уложиться больше восьми, так что приближение было бы заведомо не менее точным.

Оценка длины ступеньки по рисунку, то есть расстояния между координатами  $x_B$  и  $x_C$ , показывает, что она в 68 раз меньше длины структуры в целом между  $x_A$  и  $x_F$ . То есть, для приближения структуры в целом такими малыми ступеньками потребовалось бы взять 68 ступенек. Однако из рисунка можно видеть, что при разбиении каждого из пяти участков не семь частей получается всего 35 ступенек. Таким образом, предложенное приближение ступеньками с переменным шагом позволяет сэкономить требуемое количество вычислений (то есть последовательных шагов от ступеньки к ступеньке) как раз в два раза.

Можно полагать, что при наличии в структуре более крутых участков, чем показанный на рисунке участок ВС, экономия вычислений была бы еще больше.

### 9.6.1. Некоторые возможности дальнейшей разработки

Из проделанного рассмотрения можно видеть, что разбиению структуры на ступеньки должно предшествовать представление зависимости волнового числа от координаты  $k(x)$  отрезками прямых линий.

Единого руководящего правила для такого разбиения на данный момент авторы предложить не осмеливаются, так как этот вопрос, в том числе получение критериев точности, ими достаточно не проработан. Однако можно указать некоторые наводящие соображения, проверку и углубление которых авторы предлагают в качестве предмета для размышления любознательному читателю.

Итак, в первом приближении в качестве таких прямых можно положить отрезки, соединяющие экстремумы зависимости  $k$  от  $x$ . Примером таких прямых являются точечные линии АС и СЕ на рис. 9.9, а, а также прямая (на рисунке не показана) между точками Е и F. Для нахождения точек экстремумов, то есть максимумов и минимумов исходной кривой, можно воспользоваться равенством нулю первой производной.

Для нахождения промежуточных точек между экстремумами можно сначала найти зависящую от координаты разность между полученным отрезком прямой и реальной кривой на этом же отрезке. Далее следует построить полученную разность как зависимость от координаты, так что отрезок прямой теперь будет ориентирован по горизонтали с равными ординатами по краям, а кривая разности будет иметь выпуклость вверх или вниз. Дифференцирование такой выпуклой кривой даст нулевое значение производной, при координате которой и следует расположить искомую точку разбиения исходной зависимости  $k$  от  $x$ .

Следует заметить, что кроме максимумов и минимумов на исходной кривой могут быть перегибы, где первая производная будет иметь не нуль, а экстремум. В этих точках будет нуль не первой, а второй производной. Такие точки тоже можно положить за точками разбиения, что даст еще более высокую точность.

Таким образом, для оптимального выявления точек разбиения следует воспользоваться дифференцированием исходной зависимости  $k$  от  $x$ , причем полезно использовать не только первую, но и вторую производную.

Итак, процедуру вычисления коэффициентов отражения и прохождения при заданной зависимости волнового числа от координаты можно представить в виде следующей совокупности шагов.

#### Шаг № 1.

Получение зависимости волнового числа от координаты, которое должно быть выполнено каким-то независимым образом.



**Шаг № 2.**

Дифференцирование полученной зависимости с целью получения первой и второй производных.

**Шаг № 3.**

Нахождение координат разбиения из равенства нулю тех и других производных.

**Шаг № 4.**

Приближение исходной кривой прямыми отрезками, проходящими через точки разбиения.

**Шаг № 5.**

Разбиение каждого отрезка на семь частей и построение соответствующих ступенек.

**Шаг № 6.**

Вычисление требуемых коэффициентов с использованием полученного ступенчатого приближения.

Следует заметить, что предложенные здесь и в предыдущем разделе соображения не являются окончательными и исчерпывающими. Неоднородности реальных структур могут быть весьма разнообразными (например, импульсными, периодическими, случайными и другими). Авторы полагают, что вполне достойной задачей было бы изучение, систематизация и определенная классификация возможных видов неоднородностей, чтобы найти оптимальные способы изучения распространения волн в неоднородных средах. По-видимому, такая задача еще ожидает своего исследователя, так что авторы осмеливаются предложить любознательному читателю попытаться попробовать свои силы в этой области.

## Выводы по главе 9

Данная глава посвящена описанию корректности применения ступенчатого приближения для структуры с плавной неоднородностью линейно нарастающего характера. Рассмотрение выполнено с использованием метода обобщенного импеданса. Получен критерий, определяющий максимальное количество ступенек, достаточное для заданной степени приближения.

Основные результаты, полученные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрена корректность применения ступенчатого приближения для расчета коэффициентов отражения, прохождения и поглощения при падении волны на неоднородную структуру. В качестве параметра, определяющего распространение волны в структуре, принято волновое число. Исходным распределением считалось линейное нарастание волнового числа от начальной до конечной точек структуры. В качестве приближения использовано представление структуры в виде

совокупности слоев, в каждом из которых волновое число сохраняется постоянным, а от слоя к слою возрастает ступенчатым образом.

2. В применении к ступенчато нарастающей структуре кратко описан математический аппарат метода импеданса в варианте пересчета амплитуд. Приведены выражения, определяющие коэффициенты отражения, прохождения и поглощения. Принято базовое распределение волновых чисел, состоящее в их ступенчатом нарастании в пределах 16 слоев структуры. Для величин волновых чисел принято также 16 градаций. В таких рамках сформированы 12 распределений с возрастающей дробностью разбиения структуры на ступеньки. Первое распределение насчитывало 2 ступеньки, последнее — 16 ступенек. Базовое распределение введено в относительных единицах, по отношению к полной длине структуры в целом.

3. Приведена схема распространения волн в такой структуре. В каждом слое присутствуют две волны: одна прямого направления и другая — обратного. Полное отражение и прохождение волны через структуру в целом формируется в результате суперпозиции таких волн, выходящих из структуры в прямом и обратном направлениях. Показано, что зависимость коэффициента отражения от степени дробности структуры при фиксированной ее длине имеет изрезанный характер, обусловленный интерференционным взаимодействием распространяющихся волн. Основной причиной изрезанности является возможность возбуждения резонансов стоячих волн, когда на длине структуры укладывается несколько полуволен длины, соответствующей максимальному значению волнового числа в конечной точке структуры.

4. Отмечено, что изрезанный характер отражения не позволяет выполнить корректное приближение линейной структуры ступенчатой. Показано, что для исключения возможности возбуждения резонансов половина минимальной длина волны должна быть больше длины структуры в целом. Из такого требования получено критическое, то есть максимальное значение волнового числа, равное отношению числа « $\pi$ » к длине структуры в целом. Для решения практических задач, требующих корректного подхода (то есть отсутствия резонансных явлений), введена нормировка волнового числа путем умножения его на численный коэффициент, приводящий к условию, чтобы половина минимальной длины волны была больше длины структуры.

5. Для ступенчатой структуры рассмотрена зависимость коэффициента отражения от степени дробности распределения волновых чисел. Установлено, что корректным приближением линейного роста ступенчатым является такое, при котором максимальное волновое число меньше критического. Отмечено, что на практике вблизи критического значения для достижения корректности (в пределах 5%) достаточно разбиения структуры на восемь ступенек равной высоты и протяженности. При превышении максимальным волновым числом критического значения никакое увеличение дробности разбиения (то есть увеличение

числа ступенек) к повышению точности приближения линейной структуры ступенчатой не приводит.

6. Рассмотрена возможность применения развитого аппарата для исследования распространения волн в структурах с произвольными видами неоднородностей. Отмечено, что для обеспечения корректности расчета превышение половины наиболее короткой длины волны над длиной структуры является необходимым при любых видах неоднородностей, однако достаточность разбиения структуры на восемь ступенек хорошо работает только в случае линейных неоднородностей. Для работы с неоднородностями любых видов предложено приближение неоднородной зависимости волнового числа от координаты в виде совокупности следующих друг за другом отрезков прямых линий, каждый из которых разбивается далее на восемь одинаковых ступенек. Кратко обсуждены некоторые вопросы, требующие дальнейшего развития.

## Глава 10

### МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ

Рассмотренный в главах 2–5 метод обобщенного импеданса является одним из наиболее употребительных методов расчета распространения волн в многослойных средах [4, 8]. В принципе он позволяет решить любую из подобного класса задач, как это наглядно продемонстрировано на ряде примеров в главах 6–9. В то же время, метод импеданса обладает некоторым неудобством в том отношении, что рассмотрение приходится начинать с конца структуры, противоположного тому, со стороны которого падает входящая волна. Поэтому представляет интерес найти метод, который позволяет рассматривать распространение волны не от конца к началу, а последовательно от начала к концу, то есть продвигаясь по шагам в том же направлении, что и исходная падающая волна. Таким методом является описываемый далее метод исключения, состоящий в представлении структуры в виде отдельных ячеек, которые прикладываются друг к другу в последовательном порядке, соответствующем направлению прохождения волны. Идеологическая сторона метода исключения несколько сложнее, чем у метода импеданса, однако объем и возможность алгоритмизации расчета те же самые. Дополнительным достоинством метода исключения является возможность использования для каждой из отдельных ячеек метода усреднения [1, стр. 108–163], что приводит к сокращению объема вычислений.

В настоящей главе приведена общая схема метода исключения. Рассмотрение выполнено для одномерных волн, причем сразу учитываются волны прямого и встречного направлений. Кратко приведена схема обобщения метода на случай электромагнитных волн. Последующие главы будут посвящены примерам применения метода для расчета распространения волн в различных многослойных структурах.

В главе частично использован материал монографий [60, стр. 28–85], [62, стр. 13–37], а также статьи [60]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

#### **10.1. Геометрия задачи, волновые функции и граничные условия**

Рассмотрим падение двух встречных одномерных волн на многослойную структуру, состоящую из произвольного числа плоскопараллельных сред. Геометрия задачи показана на рис. 10.1.

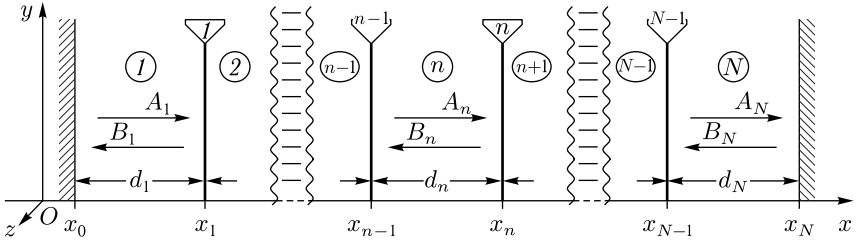


Рис. 10.1. Геометрия распространения встречных одномерных волн

Структура содержит  $N$  сред, в виде наложенных друг на друга плоских однородных бесконечно протяженных пластин. Среды разделены  $N - 1$  плоскими бесконечно тонкими границами.

Декартова система координат  $Oxyz$  выбрана таким образом, что плоскость  $Oyz$  параллельна плоскостям пластин, а ось  $Ox$  им перпендикулярна.

Координаты границ равны  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ , расстояния между ними

$$d_n = x_n - x_{n-1}. \quad (10.1)$$

Вдоль оси  $Ox$  в обоих ее направлениях в структуре могут распространяться плоские одномерные волны.

Координатная часть волнового уравнения в среде с номером  $n$  имеет вид:

$$\frac{d^2 U_n}{dx^2} + k_n^2 U_n = 0, \quad (10.2)$$

где  $U_n$  — амплитуда волны,  $k_n$  — ее волновое число.

### 10.1.1. Волновые функции первого и второго рода

Решение уравнения (10.2), нормированное относительно точки исхода волны, имеет вид суперпозиции прямой  $A_n$  и встречной  $B_n$  волн, распространяющихся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси  $Ox$ :

$$U_n = A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_n)}. \quad (10.3)$$

Будем называть (10.3) «волновой функцией первого рода».

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести также функцию

$$V_n = -iA_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + iB_n e^{ik_n(x-x_n)}, \quad (10.4)$$

которую будем называть «волновой функцией второго рода».

Волновые функции первого и второго рода связаны соотношением

$$V_n = \frac{1}{k_n} \frac{dU_n}{dx}; \quad (10.5)$$

или

$$\frac{dU_n}{dx} = k_n V_n. \quad (10.6)$$

### 10.1.2. Граничные условия

Для удобства записи граничных условий далее будем использовать для обозначения границы индекс номера границы вверху в скобках.

Условия на границе с номером  $n$  для волновых функций первого рода требуют равенства самих функций и их производных, то есть

$$U_n^{(n)} = U_{n+1}^{(n)}; \quad (10.7)$$

$$\frac{dU_n^{(n)}}{dx} = \frac{dU_{n+1}^{(n)}}{dx}. \quad (10.8)$$

Поскольку волновая функция второго рода пропорциональна производной от функции первого рода, то вместо второго условия для производной от  $U_n$  (10.8), можно использовать следующее из (10.6) условие для самой функции второго рода  $V_n$ :

$$k_n V_n^{(n)} = k_{n+1} V_{n+1}^{(n)}. \quad (10.9)$$

Таким образом, пара условий (10.7) и (10.8) полностью определяют соотношение амплитуд распространяющихся волн на границе.

## 10.2. Условия сопряжения для волновых функций

Для дальнейшего рассмотрения понадобится связь между значениями функций первого и второго рода по обе стороны от каждого одного слоя, которую будем именовать условиями сопряжения. Поскольку речь идет о конкретном слое, заключенном между двумя границами, то есть по существу о трехслойной структуре, то параметры волн, соответствующих среднему слою такой структуры, можно определить двумя методами: прямым и методом усреднения [1, стр. 108–125]. Рассмотрим эти возможности по отдельности.

### 10.2.1. Прямой метод

Введем в рассмотрение две функции:

$$U_n = A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_n)}; \quad (10.10)$$

$$V_n = -iA_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + iB_n e^{ik_n(x-x_n)}. \quad (10.11)$$

Первая представляет собой решение координатного волнового уравнения, нормированное относительно точек исхода прямой и встречной волн, вторая — частное от деления на волновое число производной от первой функции:

$$V_n = \frac{1}{k_n} \frac{dU_n}{dx}. \quad (10.12)$$

При этом

$$\frac{dU_n}{dx} = k_n V_n. \quad (10.13)$$

Преобразуя (10.13), а также дифференцируя (10.11), получаем систему уравнений для  $U_n$  и  $V_n$  в виде:

$$\frac{dU_n}{dx} - k_n V_n = 0; \quad (10.14)$$

$$\frac{dV_n}{dx} + k_n U_n = 0. \quad (10.15)$$

Интегрируем (10.14) и (10.15) по  $x$  от  $x_{n-1}$  до  $x_n$ :

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dU_n}{dx} dx - k_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} V_n dx = 0; \quad (10.16)$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dV_n}{dx} dx + k_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} U_n dx = 0. \quad (10.17)$$

Выполняя интегрирование в первых слагаемых этих выражений, получаем:

$$U_n^{(n)} - U_n^{(n-1)} - k_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} V_n dx = 0; \quad (10.18)$$

$$V_n^{(n)} - V_n^{(n-1)} + k_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} U_n dx = 0. \quad (10.19)$$

Для дальнейших преобразований удобно выразить функции  $U_n$  и  $V_n$  через амплитуды волн  $A_n$  и  $B_n$  в соответствии с (10.10)–(10.11):

$$U_n^{(n)} = A_n e^{-ik_n d_n} + B_n; \quad (10.20)$$

$$U_n^{(n-1)} = A_n + B_n e^{-ik_n d_n}; \quad (10.21)$$

$$V_n^{(n)} = -iA_n e^{-ik_n d_n} + iB_n; \quad (10.22)$$

$$V_n^{(n-1)} = -iA_n + iB_n e^{-ik_n d_n}. \quad (10.23)$$

Рассматривая (10.20)–(10.21) как систему двух уравнений относительно  $A_n$  и  $B_n$ , получаем:

$$A_n = \frac{U_n^{(n-1)} - U_n^{(n)} e^{-ik_n d_n}}{1 - e^{-2ik_n d_n}}; \quad (10.24)$$

$$B_n = \frac{-U_n^{(n-1)} e^{-ik_n d_n} + U_n^{(n)}}{1 - e^{-2ik_n d_n}}. \quad (10.25)$$

Аналогично из (10.22)–(10.23) получаем:

$$A_n = i \frac{(V_n^{(n-1)} - V_n^{(n)}) e^{-ik_n d_n}}{1 - e^{-2ik_n d_n}}; \quad (10.26)$$

$$B_n = i \frac{(V_n^{(n-1)} e^{-ik_n d_n} - V_n^{(n)})}{1 - e^{-2ik_n d_n}}. \quad (10.27)$$

Интегралы, входящие во вторые слагаемые выражений (10.18) и (10.19), выразим через (10.10)–(10.11):

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} V_n dx = -iA_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} e^{-ik_n(x-x_{n-1})} dx + iB_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} e^{ik_n(x-x_n)} dx; \quad (10.28)$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} U_n dx = A_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} e^{-ik_n(x-x_{n-1})} dx + B_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} e^{ik_n(x-x_n)} dx. \quad (10.29)$$

Входящие в (10.28)–(10.29) интегралы равны:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} e^{-ik_n(x-x_{n-1})} dx = -\frac{i}{k_n} (1 - e^{-ik_n d_n}); \quad (10.30)$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} e^{ik_n(x-x_n)} dx = -\frac{i}{k_n} (1 - e^{-ik_n d_n}). \quad (10.31)$$

Подставляя (10.30)–(10.31) в (10.28)–(10.29), получаем:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} V_n dx = (-A_n + B_n) \frac{1 - e^{-ik_n d_n}}{k_n}; \quad (10.32)$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} U_n dx = -i(A_n + B_n) \frac{1 - e^{-ik_n d_n}}{k_n}. \quad (10.33)$$

Подставляя (10.24)–(10.25) в (10.32) и (10.26)–(10.27) в (10.33), получаем входящие в (10.18)–(10.19) интегралы в виде:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} V_n dx = -\frac{i}{k_n} \frac{(1 - e^{-ik_n d_n})^2}{1 - e^{-2ik_n d_n}} (V_n^{(n-1)} + V_n^{(n)}); \quad (10.34)$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} U_n dx = -\frac{i}{k_n} \frac{(1 - e^{-ik_n d_n})^2}{1 - e^{-2ik_n d_n}} (U_n^{(n-1)} + U_n^{(n)}). \quad (10.35)$$



Подставляя (10.34)–(10.35) в (10.18)–(10.19), получаем:

$$U_n^{(n)} - U_n^{(n-1)} + i \frac{(1 - e^{-ik_n d_n})^2}{1 - e^{-2ik_n d_n}} (V_n^{(n-1)} + V_n^{(n)}) = 0; \quad (10.36)$$

$$V_n^{(n)} - V_n^{(n-1)} - i \frac{(1 - e^{-ik_n d_n})^2}{1 - e^{-2ik_n d_n}} (U_n^{(n-1)} + U_n^{(n)}) = 0. \quad (10.37)$$

Введем обозначение:

$$\alpha_n = -i \frac{(1 - e^{-ik_n d_n})^2}{1 - e^{-2ik_n d_n}} = -i \frac{1 - e^{-ik_n d_n}}{1 + e^{-ik_n d_n}}. \quad (10.38)$$

Величину  $\alpha_n$ , определяющую связь между значениями функций на следующих друг за другом двух границах, будем называть далее «параметром сопряжения для прямого метода».

С этим обозначением (10.36)–(10.37) принимают вид:

$$U_n^{(n)} - U_n^{(n-1)} - \alpha_n (V_n^{(n-1)} + V_n^{(n)}) = 0; \quad (10.39)$$

$$V_n^{(n)} - V_n^{(n-1)} + \alpha_n (U_n^{(n-1)} + U_n^{(n)}) = 0. \quad (10.40)$$

Раскрывая скобки и меняя знаки, приведем эти выражения к более удобному для дальнейшего рассмотрения виду:

$$U_n^{(n-1)} - U_n^{(n)} + \alpha_n V_n^{(n-1)} + \alpha_n V_n^{(n)} = 0; \quad (10.41)$$

$$\alpha_n U_n^{(n-1)} + \alpha_n U_n^{(n)} - V_n^{(n-1)} + V_n^{(n)} = 0. \quad (10.42)$$

Поскольку выражения (10.36)–(10.37), (10.39)–(10.40), (10.39)–(10.41) связывают (то есть как бы сопрягают между собой) значения функций  $U_n$  и  $V_n$  на противоположных границах среды  $n$  при  $x_{n-1}$  и  $x_n$ , будем называть их «условиями сопряжения» функций  $U_n$  и  $V_n$  для среды  $n$ , заключенной между границами  $n - 1$  и  $n$ .

**Замечание.** Полученные в работе [74] аналогичные выражения названы там «граничными условиями», что не вполне корректно, так как здесь присутствует не одна граница, а две. Следует сказать, что подобная некорректность терминологии является довольно распространенной и встречается, например, в работе [134] и ряде других. По нашему мнению, термин «условия сопряжения» более адекватно отражает положение дел, то есть является более корректным, поэтому он и используется далее.

### 10.2.2. Метод усреднения

Введем в рассмотрение две функции:

$$U_n = A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + B_n e^{ik_n(x-x_n)}; \quad (10.43)$$

$$V_n = -iA_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})} + iB_n e^{ik_n(x-x_n)}. \quad (10.44)$$

Первая представляет собой решение координатного волнового уравнения, нормированное относительно точек исхода прямой и встречной

волн, вторая — частное от деления на волновое число производной от первой функции:

$$V_n = \frac{1}{k_n} \frac{dU_n}{dx}. \quad (10.45)$$

При этом

$$\frac{dU_n}{dx} = k_n V_n. \quad (10.46)$$

Преобразуя (10.46), а также дифференцируя (10.44), получаем систему уравнений для  $U_n$  и  $V_n$  в виде:

$$\frac{dU_n}{dx} - k_n V_n = 0; \quad (10.47)$$

$$\frac{dV_n}{dx} + k_n U_n = 0. \quad (10.48)$$

Интегрируем (10.47) и (10.48) по  $x$  от  $x_{n-1}$  до  $x_n$ :

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dU_n}{dx} dx - k_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} V_n dx = 0; \quad (10.49)$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dV_n}{dx} dx + k_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} U_n dx = 0. \quad (10.50)$$

Преобразуем первые слагаемые выражений (10.47) и (10.48), выполняя интегрирование:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dU_n}{dx} dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} U_n dx = U_n|_{x=x_n} - U_n|_{x=x_{n-1}}; \quad (10.51)$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dV_n}{dx} dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} V_n dx = V_n|_{x=x_n} - V_n|_{x=x_{n-1}}. \quad (10.52)$$

Преобразуем вторые слагаемые тех же выражений, вводя усреднение:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} V_n dx = (V_n)_{\text{ср.}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} dx = \frac{d_n}{2} (V_n|_{x=x_n} + V_n|_{x=x_{n-1}}); \quad (10.53)$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} U_n dx = (U_n)_{\text{ср.}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} dx = \frac{d_n}{2} (U_n|_{x=x_n} + U_n|_{x=x_{n-1}}). \quad (10.54)$$

Подставляя (10.51)–(10.54) в (10.49)–(10.50), получаем:

$$U_n|_{x=x_n} - U_n|_{x=x_{n-1}} - \frac{k_n d_n}{2} (V_n|_{x=x_n} + V_n|_{x=x_{n-1}}) = 0; \quad (10.55)$$

$$V_n|_{x=x_n} - V_n|_{x=x_{n-1}} + \frac{k_n d_n}{2} (U_n|_{x=x_n} + U_n|_{x=x_{n-1}}) = 0. \quad (10.56)$$

Введем обозначение:

$$\alpha_n = \frac{k_n d_n}{2}. \quad (10.57)$$

Величину  $\alpha_n$ , определяющую связь между значениями функций на следующих друг за другом двух границах, будем называть далее «параметром сопряжения для метода усреднения».

**Замечание.** Поскольку далее во все последующие выкладки параметр сопряжения будет входить одинаковым образом, независимо от того, каким способом он получен, чтобы не загромождать формулы излишними индексами, обозначение  $\alpha_n$  за этим параметром для обоих методов сохраним одним и тем же. То есть формулы (10.38) и (10.57) далее будут использоваться наравне друг с другом, а различие между методами получения параметра  $\alpha_n$  для каждого конкретного случая можно будет установить непосредственно, обращаясь к формулам (10.38) и (10.57).

Подставляя (10.57) в (10.55)–(10.56), раскрывая скобки, умножая оба выражения на  $-1$  и меняя порядок слагаемых, получаем:

$$U_n|_{x=x_{n-1}} - U_n|_{x=x_n} + \alpha_n V_n|_{x=x_{n-1}} + \alpha_n V_n|_{x=x_n} = 0; \quad (10.58)$$

$$\alpha_n U_n|_{x=x_{n-1}} + \alpha_n U_n|_{x=x_n} - V_n|_{x=x_{n-1}} + V_n|_{x=x_n} = 0. \quad (10.59)$$

Упростим дальнейшие обозначения, введя для обозначения граничного значения функции вместо вертикальной черты с индексом границы, заключенный в скобки индекс границы наверху, то есть будем полагать:

$$W_n|_{x=x_m} \rightarrow W_n^{(m)}, \quad (10.60)$$

где  $W$  — функция  $U$  или  $V$ ,  $n$  — номер среды,  $m$  — номер границы.

При этом выражения (10.58)–(10.59) принимают вид:

$$U_n^{(n-1)} - U_n^{(n)} + \alpha_n V_n^{(n-1)} + \alpha_n V_n^{(n)} = 0; \quad (10.61)$$

$$\alpha_n U_n^{(n-1)} + \alpha_n U_n^{(n)} - V_n^{(n-1)} + V_n^{(n)} = 0. \quad (10.62)$$

Полученные выражения (10.61)–(10.62) дают связь между заданными на двух противоположных границах области  $n$  значениями функций  $U_n$  и  $V_n$ .

Можно видеть, что эти выражения по форме полностью совпадают с (10.41)–(10.42), за исключением конкретного вида параметра  $\alpha_n$ , который для прямого метода будет определяться формулой (10.38), а для метода усреднения — формулой (10.57).

Таким образом, как и ранее, будем называть эти выражения «условиями сопряжения» функций  $U_n$  и  $V_n$  для среды  $n$ , заключенной между границами  $n - 1$  и  $n$ .

**Замечание.** Как указывалось в предыдущем разделе, наименование формул (10.61)–(10.62), как и формул (10.41)–(10.42) «граничными условиями», как это сделано в работах [74, 134] и других, не вполне корректно, поэтому здесь и далее будем именовать эти формулы «условиями сопряжения».

### 10.3. Входящие и выходящие волны относительно всей структуры в целом

Предполагаем, что в структуру входят и выходят волны только на ее внешних поверхностях, то есть при  $x = x_0$  и  $x = x_N$ .

Обозначим амплитуды входящих в структуру встречных волн через  $A_P$  и  $B_P$ , а выходящих — через  $A_S$  и  $B_S$ .

Введем обозначения для амплитуд волн, входящих в структуру и выходящих из нее на ее внешних поверхностях, а также для амплитуд волн на первой и последней внутренних границах структуры, то есть на поверхностях при  $x_0, x_1, x_{N-1}, x_N$ .

Схема вводимых обозначений показана на рис. 10.2.

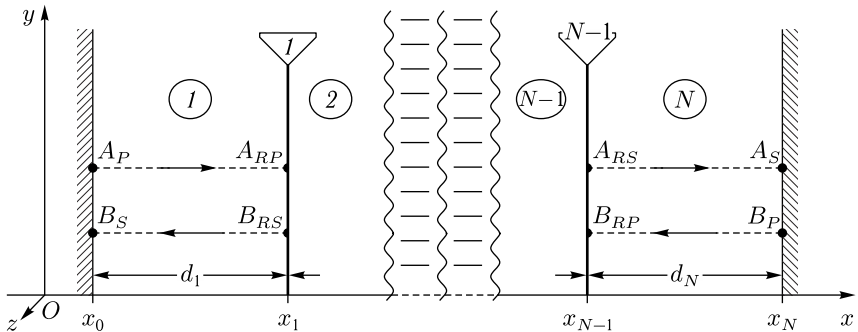


Рис. 10.2. Схема обозначений амплитуд волн на внешних и ближайших к ним внутренних поверхностях структуры

В среде  $I$ , то есть при  $n = 1$ , решение волнового уравнения имеет вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}. \quad (10.63)$$

При этом в структуру при  $x = x_0$  входит волна с амплитудой:

$$A_P = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} \Big|_{x=x_0} = A_1. \quad (10.64)$$

Из структуры при  $x = x_0$  выходит волна с амплитудой:

$$B_S = B_1 e^{ik_1(x-x_1)} \Big|_{x=x_0} = B_1 e^{-ik_1 d_1}. \quad (10.65)$$

В среде  $N$ , то есть при  $n = N$ , решение волнового уравнения имеет вид:

$$U_N = A_N e^{-ik_N(x-x_{N-1})} + B_N e^{ik_N(x-x_N)}. \quad (10.66)$$

При этом в структуру при  $x = x_N$  входит волна с амплитудой:

$$B_P = B_N e^{ik_N(x-x_N)} \Big|_{x=x_N} = B_N. \quad (10.67)$$

Из структуры при  $x = x_N$  выходит волна с амплитудой:

$$A_S = A_N e^{-ik_N(x-x_{N-1})} \Big|_{x=x_N} = A_N e^{-ik_N d_N}. \quad (10.68)$$

Таким образом,

$$A_P = A_1; \quad (10.69)$$

$$A_S = A_N e^{-ik_N d_N}. \quad (10.70)$$

$$B_P = B_N; \quad (10.71)$$

$$B_S = B_1 e^{-ik_1 d_1}. \quad (10.72)$$

При этом

$$A_1 = A_P; \quad (10.73)$$

$$B_1 = B_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.74)$$

$$A_N = A_S e^{ik_N d_N}; \quad (10.75)$$

$$B_N = B_P. \quad (10.76)$$

Теперь введем еще дополнительные обозначения:

для входящих волн

$$A_{RP} = A_P e^{-ik_1 d_1}; \quad (10.77)$$

$$B_{RP} = B_P e^{-ik_1 d_1}; \quad (10.78)$$

для выходящих волн

$$A_{RS} = A_S e^{-ik_N d_N}; \quad (10.79)$$

$$B_{RS} = B_P e^{-ik_1 d_1}. \quad (10.80)$$

При этом формулы перехода к исходным обозначениям имеют вид:

для входящих волн

$$A_P = A_{RP} e^{ik_1 d_1}; \quad (10.81)$$

$$B_P = B_{RP} e^{ik_N d_N}; \quad (10.82)$$

для выходящих волн

$$A_S = A_{RS}e^{-ik_N d_N}; \tag{10.83}$$

$$B_S = B_{RS}e^{-ik_1 d_1}. \tag{10.84}$$

### 10.4. Соотношения прямой передачи

Метод исключения по ячейкам предполагает разбиение всей структуры на ячейки, каждая из которых содержит какую-то одну среду с прилегающей к ней одной границей, с последующим сшиванием ячеек последовательным прохождением от начала структуры к ее концу. Сшивание, осуществляемое переходом от ячейки к ячейке в положительном направлении оси  $Ox$ , будем называть «прямой передачей».

К одному участку среды с противоположных сторон примыкают две границы, поэтому в качестве единичной ячейки можно рассматривать участок среды в совокупности с той или иной границей.

Будем называть ячейкой первого рода участок среды с границей, примыкающей к нему со стороны меньших значений координаты  $x$ , то есть участок среды с предшествующей ему границей. В свою очередь участок среды со следующей за ним границей будем называть ячейкой второго рода.

#### 10.4.1. Прямая передача первого рода

Рассмотрим прямую передачу первого рода. Схема одной элементарной ячейки с номером  $n$  для этого случая показана на рис. 10.3.

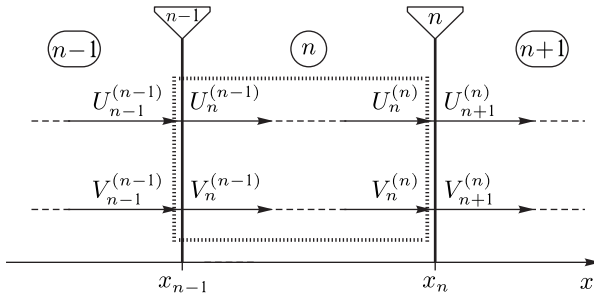


Рис. 10.3. Схема элементарной ячейки с номером  $n$  при прямой передаче первого рода

Ячейка включает в себя участок среды, заключенный между границами при  $x_{n-1}$  и  $x_n$ , а также предшествующую этому участку границу при  $x_{n-1}$ . На рис. 10.3 контуры такой ячейки показаны точечной линией.

Будем условно считать, что в ячейку «входят» функции  $U_{n-1}^{(n-1)}$  и  $V_{n-1}^{(n-1)}$  и «выходят» функции  $U_n^{(n)}$  и  $V_n^{(n)}$ .

Граничные условия на границе  $n - 1$  имеют вид:

$$U_{n-1}^{(n-1)} = U_n^{(n-1)}; \quad (10.85)$$

$$k_{n-1}V_{n-1}^{(n-1)} = k_nV_n^{(n-1)}. \quad (10.86)$$

Эти условия можно записать в виде:

$$U_n^{(n-1)} = U_{n-1}^{(n-1)}; \quad (10.87)$$

$$V_n^{(n-1)} = \frac{k_{n-1}}{k_n}V_{n-1}^{(n-1)}. \quad (10.88)$$

Условия сопряжения для среды  $n$ , заключенной между границами  $n - 1$  и  $n$ , имеют вид:

$$U_n^{(n-1)} - U_n^{(n)} + \alpha_n V_n^{(n-1)} + \alpha_n V_n^{(n)} = 0; \quad (10.89)$$

$$\alpha_n U_n^{(n-1)} + \alpha_n U_n^{(n)} - V_n^{(n-1)} + V_n^{(n)} = 0. \quad (10.90)$$

Будем рассматривать эти условия сопряжения как систему уравнений для определения «выходящих» из ячейки функций  $U_n^{(n)}$  и  $V_n^{(n)}$ , имеющую вид:

$$-U_n^{(n)} + \alpha_n V_n^{(n)} = -U_n^{(n-1)} - \alpha_n V_n^{(n-1)}; \quad (10.91)$$

$$\alpha_n U_n^{(n)} + V_n^{(n)} = -\alpha_n U_n^{(n-1)} + V_n^{(n-1)}. \quad (10.92)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$U_n^{(n)} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} U_n^{(n-1)} + \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} V_n^{(n-1)}; \quad (10.93)$$

$$V_n^{(n)} = -\frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} U_n^{(n-1)} + \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} V_n^{(n-1)}. \quad (10.94)$$

Подстановка в эти формулы следующих из граничных условий соотношений (10.87)–(10.88), позволяет исключить функции  $U_n^{(n-1)}$  и  $V_n^{(n-1)}$ , в результате чего получаем:

$$U_n^{(n)} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} U_{n-1}^{(n-1)} + \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_{n-1}}{k_n} V_{n-1}^{(n-1)}; \quad (10.95)$$

$$V_n^{(n)} = -\frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} U_{n-1}^{(n-1)} + \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_{n-1}}{k_n} V_{n-1}^{(n-1)}. \quad (10.96)$$

Эти формулы выражают «выходящие» из ячейки  $n$  функции  $U_n^{(n)}$  и  $V_n^{(n)}$  через «входящие» в эту ячейку функции  $U_{n-1}^{(n-1)}$  и  $V_{n-1}^{(n-1)}$ . Будем называть формулы (10.95)–(10.96) «соотношениями прямой передачи первого рода» для среды с номером  $n$ .

Запишем те же выражения в обобщенном виде, для чего введем обозначения:

$$G_{11}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2}; \tag{10.97}$$

$$G_{12}^{[n]} = \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_{n-1}}{k_n}; \tag{10.98}$$

$$G_{21}^{[n]} = -\frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2}; \tag{10.99}$$

$$G_{22}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_{n-1}}{k_n}. \tag{10.100}$$

В этих обозначениях соотношения прямой передачи (10.95)–(10.96) для среды  $n$  принимают вид:

$$U_n^{(n)} = G_{11}^{[n]} U_{n-1}^{(n-1)} + G_{12}^{[n]} V_{n-1}^{(n-1)}; \tag{10.101}$$

$$V_n^{(n)} = G_{21}^{[n]} U_{n-1}^{(n-1)} + G_{22}^{[n]} V_{n-1}^{(n-1)}. \tag{10.102}$$

### 10.4.2. Прямая передача второго рода

Рассмотрим прямую передачу второго рода. Схема одной элементарной ячейки с номером  $n$  для этого случая показана на рис. 10.4.

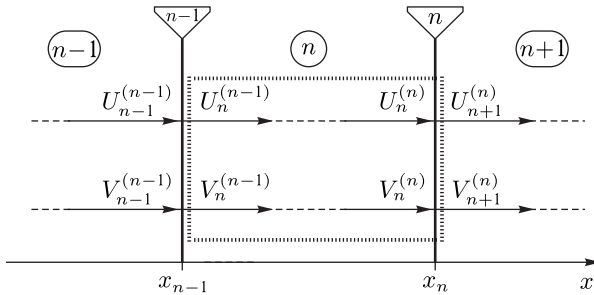


Рис. 10.4. Схема элементарной ячейки с номером  $n$  при прямой передаче второго рода

Ячейка включает в себя участок среды, заключенный между границами при  $x_{n-1}$  и  $x_n$ , а также следующую за этим участком границу при  $x_{n+1}$ . На рис. 10.4 контуры такой ячейки показаны точечной линией.

Будем условно считать, что в ячейку «входят» функции  $U_n^{(n-1)}$  и  $V_n^{(n-1)}$  и «выходят» функции  $U_{n+1}^{(n)}$  и  $V_{n+1}^{(n)}$ .

Граничные условия на границе  $N - 2$  имеют вид:

$$U_n^{(n)} = U_{n+1}^{(n)}; \tag{10.103}$$

$$k_n V_n^{(n)} = k_{n+1} V_{n+1}^{(n)}. \tag{10.104}$$



Эти условия можно записать в виде:

$$U_n^{(n)} = U_{n+1}^{(n)}; \quad (10.105)$$

$$V_n^{(n)} = \frac{k_{n+1}}{k_n} V_{n+1}^{(n)}. \quad (10.106)$$

Условия сопряжения для среды  $n$ , заключенной между границами  $n - 1$  и  $n$  имеют вид:

$$U_n^{(n-1)} - U_n^{(n)} + \alpha_n V_n^{(n-1)} + \alpha_n V_n^{(n)} = 0; \quad (10.107)$$

$$\alpha_n U_n^{(n-1)} + \alpha_n U_n^{(n)} - V_n^{(n-1)} + V_n^{(n)} = 0. \quad (10.108)$$

Подставляя в эти выражения функции  $U_n^{(n)}$  и  $V_n^{(n)}$  в соответствии с граничными условиями (1.105)–(10.106) и умножая первое из полученных выражений на  $-1$ , получаем систему уравнений для определения функций  $U_{n+1}^{(n)}$  и  $V_{n+1}^{(n)}$ :

$$U_{n+1}^{(n)} - \alpha_n \frac{k_{n+1}}{k_n} V_{n+1}^{(n)} = U_n^{(n-1)} + \alpha_n V_n^{(n-1)}; \quad (10.109)$$

$$\alpha_n U_{n+1}^{(n)} + \frac{k_{n+1}}{k_n} V_{n+1}^{(n)} = -\alpha_n U_n^{(n-1)} + V_n^{(n-1)}. \quad (10.110)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$U_{n+1}^{(n)} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} U_n^{(n-1)} + \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} V_n^{(n-1)}; \quad (10.111)$$

$$V_{n+1}^{(n)} = -\frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_n}{k_{n+1}} U_n^{(n-1)} + \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_n}{k_{n+1}} V_n^{(n-1)}. \quad (10.112)$$

Эти формулы выражают «выходящие» из ячейки  $G_{22}^{[n]}$  функции  $U_{n+1}^{(n)}$  и  $V_{n+1}^{(n)}$  через «входящие» в эту ячейку функции  $U_n^{(n-1)}$  и  $V_n^{(n-1)}$ . Будем называть формулы (10.111)–(10.112) «соотношениями прямой передачи второго рода» для среды с номером  $n$ .

Запишем те же выражения в обобщенном виде, для чего введем обозначения:

$$H_{11}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2}; \quad (10.113)$$

$$H_{12}^{[n]} = \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2}; \quad (10.114)$$

$$H_{21}^{[n]} = -\frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_n}{k_{n+1}}; \quad (10.115)$$

$$H_{22}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_n}{k_{n+1}}. \quad (10.116)$$

В этих обозначениях соотношения прямой передачи второго рода (10.111)–(10.112) для среды  $n$  принимают вид:

$$U_{n+1}^{(n)} = H_{11}^{[n]} U_n^{(n-1)} + H_{12}^{[n]} V_n^{(n-1)}; \quad (10.117)$$

$$V_{n+1}^{(n)} = H_{21}^{[n]} U_n^{(n-1)} + H_{22}^{[n]} V_n^{(n-1)}. \quad (10.118)$$

**Замечание.** Как видим, разбиение структуры на ячейки при прямой передаче допускает два варианта. С другой стороны, при любом варианте разбиения сшивание ячеек можно осуществить не только в положительном, но и в отрицательном направлении оси  $Ox$ . Подобное сшивание в отрицательном направлении будем называть «обратной передачей».

Таким образом, метод исключения по ячейкам допускает четыре возможных варианта, все из которых должны приводить к одному и тому же результату. Как идеологическая, так и математическая сложности всех этих вариантов примерно одинаковы, поэтому выбор любого из них может определяться конкретными условиями задачи или удобством ее решения.

По этой причине в дальнейшем рассмотрении для простоты ограничимся только подробным рассмотрением прямой передачи первого рода. Все остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично.

## 10.5. Процедура последовательных подстановок

Соотношения прямой передачи для структуры, состоящей из произвольного числа сред  $N$ , могут быть получены из соотношений прямой передачи для каждой из сред по отдельности путем последовательных подстановок.

Так, соотношения прямой передачи для последовательности сред, начиная со среды 2 и кончая средой  $N - 1$  имеют вид:

среда 2

$$U_2^{(2)} = G_{11}^{[2]} U_1^{(1)} + G_{12}^{[2]} V_1^{(1)}; \quad (10.119)$$

$$V_2^{(2)} = G_{21}^{[2]} U_1^{(1)} + G_{22}^{[2]} V_1^{(1)}; \quad (10.120)$$

среда 3

$$U_3^{(3)} = G_{11}^{[3]} U_2^{(2)} + G_{12}^{[3]} V_2^{(2)}; \quad (10.121)$$

$$V_3^{(3)} = G_{21}^{[3]} U_2^{(2)} + G_{22}^{[3]} V_2^{(2)}; \quad (10.122)$$

.....

среда  $n - 1$

$$U_{n-1}^{(n-1)} = G_{11}^{[n-1]} U_{n-2}^{(n-2)} + G_{12}^{[n-1]} V_{n-2}^{(n-2')}; \quad (10.123)$$

$$V_{n-1}^{(n-1)} = G_{21}^{[n-1]} U_{n-2}^{(n-2)} + G_{22}^{[n-1]} V_{n-2}^{(n-2')}; \quad (10.124)$$

среда  $n$

$$U_n^{(n)} = G_{11}^{[n]} U_{n-1}^{(n-1)} + G_{12}^{[n]} V_{n-1}^{(n-1')}; \quad (10.125)$$

$$V_n^{(n)} = G_{21}^{[n]} U_{n-1}^{(n-1)} + G_{22}^{[n]} V_{n-1}^{(n-1')}; \quad (10.126)$$

среда  $n + 1$

$$U_{n+1}^{(n+1)} = G_{11}^{[n+1]} U_n^{(n)} + G_{12}^{[n+1]} V_n^{(n')}; \quad (10.127)$$

$$V_{n+1}^{(n+1)} = G_{21}^{[n+1]} U_n^{(n)} + G_{22}^{[n+1]} V_n^{(n')}; \quad (10.128)$$

.....

среда  $N - 2$

$$U_{N-2}^{(N-2)} = G_{11}^{[N-2]} U_{N-3}^{(N-3)} + G_{12}^{[N-2]} V_{N-3}^{(N-3')}; \quad (10.129)$$

$$V_{N-2}^{(N-2)} = G_{21}^{[N-2]} U_{N-3}^{(N-3)} + G_{22}^{[N-2]} V_{N-3}^{(N-3')}; \quad (10.130)$$

среда  $N - 1$

$$U_{N-1}^{(N-1)} = G_{11}^{[N-1]} U_{N-2}^{(N-2)} + G_{12}^{[N-1]} V_{N-2}^{(N-2')}; \quad (10.131)$$

$$V_{N-1}^{(N-1)} = G_{21}^{[N-1]} U_{N-2}^{(N-2)} + G_{22}^{[N-1]} V_{N-2}^{(N-2')}. \quad (10.132)$$

В соответствии с процедурой последовательных подстановок каждая предыдущая пара приведенных выражений подставляется в последующую, то есть сначала выражения (10.119)–(10.120), соответствующие среде 1, подставляются в (10.121)–(10.122), которые соответствуют среде 2, затем полученные выражения — в следующую пару, соответствующую среде 3 и так далее. При достижении среды  $n - 1$  выражения (10.123)–(10.124) подставляются в выражения (10.125)–(10.126), затем полученные выражения в (10.127)–(10.128) и так далее до выражений (10.129)–(10.130), которые подставляются в (10.131)–(10.132), соответствующие среде  $N - 1$ , на чем последовательные подстановки заканчиваются.

В результате, после раскрытия всех скобок и приведения подобных членов получаются выражения вида:

$$U_{N-1}^{(N-1)} = G_{11}^{[S]} U_1^{(1)} + G_{12}^{[S]} V_1^{(1')}; \quad (10.133)$$

$$V_{N-1}^{(N-1)} = G_{21}^{[S]} U_1^{(1)} + G_{22}^{[S]} V_1^{(1')}, \quad (10.134)$$

в которых коэффициенты  $G_{11}^{[S]}$ ,  $G_{12}^{[S]}$ ,  $G_{21}^{[S]}$ ,  $G_{22}^{[S]}$  представляют собой суммы  $2^{N-3}$  слагаемых, образованных произведениями  $N - 2$  коэффициентов  $G_{11}^{[n]}$ ,  $G_{12}^{[n]}$ ,  $G_{21}^{[n]}$ ,  $G_{22}^{[n]}$  в различных сочетаниях.

Полученные выражения (10.133)–(10.134) являются соотношениями прямой передачи для совокупности сред от 2 до  $N - 1$ , заключенных между средами  $x_0$  и  $x_N$ .

В некоторых случаях удобно в совокупность последовательных подстановок включить также среду  $N$ . При этом к формулам (10.119)–(10.132) добавляется следующая:

среда  $N$

$$U_N^{(N)} = G_{11}^{[N]} U_{N-1}^{(N-1)} + G_{12}^{[N]} V_{N-1}^{(N-1')}; \quad (10.135)$$

$$V_N^{(N)} = G_{21}^{[N]} U_{N-1}^{(N-1)} + G_{22}^{[N]} V_{N-1}^{(N-1')}; \quad (10.136)$$

а соотношения (10.133)–(10.134) принимают вид

$$U_N^{(N)} = G_{11}^{[SN]} U_1^{(1)} + G_{12}^{[SN]} V_1^{(1')}; \quad (10.137)$$

$$V_N^{(N)} = G_{21}^{[SN]} U_1^{(1)} + G_{22}^{[SN]} V_1^{(1')}, \quad (10.138)$$

в которых коэффициенты  $G_{11}^{[SN]}$ ,  $G_{12}^{[SN]}$ ,  $G_{21}^{[SN]}$ ,  $G_{22}^{[SN]}$  представляют собой суммы  $2^{N-2}$  слагаемых, образованных произведениями  $N - 1$  коэффициентов  $G_{11}^{[n]}$ ,  $G_{12}^{[n]}$ ,  $G_{21}^{[n]}$ ,  $G_{22}^{[n]}$  в различных сочетаниях. При этом выражения (10.137)–(10.138) являются соотношениями прямой передачи для совокупности сред от 2 до  $N$ , включающих все среды структуры, кроме первой.

## 10.6. Входная и выходная ячейки

На внешних поверхностях структуры в целом, то есть при  $x_0$ , и  $x_N$ , волны входят в структуру и выходят из нее, то есть вместо классических граничных условий там задаются амплитуды входящих волн и анализируются амплитуды выходящих. По этой причине ячейки в первой и последней средах не могут быть замкнутыми. Действительно, в первой среде в контур ячейки должна была бы входить внешняя поверхность структуры в целом, по другую сторону от которой сред и распространяющихся по ним волн уже нет, то есть классические граничные условия не могут быть заданы. В последней же среде ячейка с номером  $N$  должна примыкать к другой внешней поверхности структуры в целом, где распространяющихся волн тоже нет. Поэтому сшивание ячеек должно быть произведено лишь в пределах сред от 2 до  $N - 1$ , а первая и последняя среды ( $1$  и  $N$ ) требуют отдельного рассмотрения.

### 10.6.1. Начало структуры (среды 1 и 2)

Схема распространения волн вблизи начала структуры представлена на рис. 10.5. Контурные ячеек при  $n = 1$  и  $n = 2$  показаны точечными линиями.

Амплитуды волн:  $A_P$  — входящей в структуру и  $B_S$  — выходящей из структуры при координате  $x = x_0$ , можно связать с волновыми

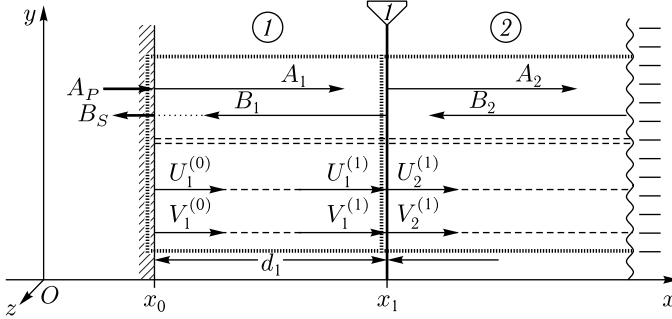


Рис. 10.5. Схема распространения волн вблизи начала структуры

функциями  $U_1^{(0)}$  и  $V_1^{(0)}$ , входящими в ячейку 1, или с волновыми функциями  $U_1^{(1)}$  и  $V_1^{(1)}$ , входящими в ячейку 2. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

#### СЛУЧАЙ 1.

Задача состоит в том, чтобы выразить волновые функции  $U_1^{(1)}$  и  $V_1^{(1)}$  через амплитуды волн:  $A_P$  — входящей в структуру при координате  $x = x_0$  и  $B_S$  — выходящей из структуры при том же значении координаты.

На границе 0 (то есть на левой внешней поверхности структуры) изменения волновых функций не происходит, сами функции и волновые числа не меняются, поэтому граничные условия имеют вид:

$$U_0^{(0)} = U_1^{(0)}; \quad (10.139)$$

$$V_0^{(0)} = V_1^{(0)}, \quad (10.140)$$

а также

$$k_0 = k_1. \quad (10.141)$$

При этом соотношения прямой передачи (10.95)–(10.96) для среды 1 принимают вид:

$$U_1^{(1)} = \frac{1 - \alpha_1^2}{1 + \alpha_1^2} U_0^{(0)} + \frac{2\alpha_1}{1 + \alpha_1^2} V_0^{(0)}; \quad (10.142)$$

$$V_1^{(1)} = -\frac{2\alpha_1}{1 + \alpha_1^2} U_0^{(0)} + \frac{1 - \alpha_1^2}{1 + \alpha_1^2} V_0^{(0)}. \quad (10.143)$$

Подставляя (10.139)–(10.140) в (10.142)–(10.143), получаем:

$$U_1^{(1)} = \frac{1 - \alpha_1^2}{1 + \alpha_1^2} U_1^{(0)} + \frac{2\alpha_1}{1 + \alpha_1^2} V_1^{(0)}; \quad (10.144)$$

$$V_1^{(1)} = -\frac{2\alpha_1}{1 + \alpha_1^2} U_1^{(0)} + \frac{1 - \alpha_1^2}{1 + \alpha_1^2} V_1^{(0)}. \quad (10.145)$$

Найдем теперь волновые функции  $U_1^{(0)}$  и  $V_1^{(0)}$ .

В среде 1 волновые функции имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (10.146)$$

$$V_1 = -iA_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + iB_1 e^{ik_1(x-x_1)}. \quad (10.147)$$

На границе 0 при  $x = x_0$  эти функции равны:

$$U_1^{(0)} = A_1 + B_1 e^{-ik_1 d_1}; \quad (10.148)$$

$$V_1^{(0)} = -iA_1 + iB_1 e^{-ik_1 d_1}. \quad (10.149)$$

В то же время, согласно формулам (10.73)–(10.74) раздела 10.3, на этой границе выполняются соотношения:

$$A_1 = A_P; \quad (10.150)$$

$$B_1 = B_S e^{ik_1 d_1}. \quad (10.151)$$

Подставляя (10.150)–(10.151) в (10.148)–(10.149), получаем:

$$U_1^{(0)} = A_P + B_S; \quad (10.152)$$

$$V_1^{(0)} = -iA_P + iB_S. \quad (10.153)$$

Подставляя (10.152)–(10.153) в (10.144)–(10.145), получаем:

$$U_1^{(1)} = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} A_P + \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} B_S; \quad (10.154)$$

$$V_1^{(1)} = -\frac{i(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} A_P + \frac{i(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} B_S. \quad (10.155)$$

Таким образом, искомые соотношения получены.

## СЛУЧАЙ 2.

Задача состоит в том, чтобы выразить волновые функции  $U_1^{(1)}$  и  $V_1^{(1)}$  через амплитуды волн:  $A_P$  — входящей в структуру при координате  $x = x_0$  и  $B_S$  — выходящей из структуры при том же значении координаты.

Волновые функции первого и второго рода в среде 1 имеют вид:

$$U_1 = A_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)}; \quad (10.156)$$

$$V_1 = -iA_1 e^{-ik_1(x-x_0)} + iB_1 e^{ik_1(x-x_1)}. \quad (10.157)$$

На границе 1 при  $x = x_1$  эти функции равны:

$$U_1^{(1)} = A_1 e^{-ik_1 d_1} + B_1; \quad (10.158)$$

$$V_1^{(1)} = -iA_1 e^{-ik_1 d_1} + iB_1. \quad (10.159)$$

Учитывая нормировку волн относительно точек исхода, получаем:

$$A_1 = A_P; \quad (10.160)$$

$$B_1 = B_S e^{ik_1 d_1}. \quad (10.161)$$

Подставляя (10.160)–(10.161) в (10.158)–(10.159), получаем:

$$U_1^{(1)} = A_P e^{-ik_1 d_1} + B_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.162)$$

$$V_1^{(1)} = -iA_P e^{-ik_1 d_1} + iB_S e^{ik_1 d_1}. \quad (10.163)$$

Таким образом, искомые соотношения для начала структуры получены.

### 10.6.2. Замечания относительно входного конца структуры

**Замечание 1.** При прямом методе в среде  $A_S$  имеем (раздел 10.2.1, формула (10.38)):

$$\alpha_1 = -i \frac{1 - e^{-ik_1 d_1}}{1 + e^{-ik_1 d_1}}. \quad (10.164)$$

Подставляя (10.164) в (10.154)–(10.155), получаем:

$$U_1^{(1)} = A_P e^{-ik_1 d_1} + B_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.165)$$

$$V_1^{(1)} = -iA_P e^{-ik_1 d_1} + iB_S e^{ik_1 d_1}. \quad (10.166)$$

Можно видеть, что эти соотношения совпадают с (10.162)–(10.163), то есть при использовании для среды  $I$  прямого метода последовательные преобразования с помощью соотношений прямой передачи можно сразу начинать с ячейки 2.

**Замечание 2.** Как видно из сравнения обеих пар соотношений (10.154)–(10.155) и (10.165)–(10.166), их общая структура относительно амплитуд  $A_P$  и  $B_S$  одинакова, то есть ее можно представить в виде:

$$U_1^{(1)} = H_{11} A_P + H_{12} B_S; \quad (10.167)$$

$$V_1^{(1)} = H_{21} A_P + H_{22} B_S. \quad (10.168)$$

При этом, если первую среду рассматривать как элемент первой ячейки, включающей в себя также внешнюю поверхность структуры в целом, как это сделано в случае  $I$ , то есть использовать для этой среды соотношения прямой передачи (10.142)–(10.143), то коэффициенты  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{21}$ ,  $H_{22}$  принимают вид:

$$H_{11} = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.169)$$

$$H_{12} = \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.170)$$

$$H_{21} = \frac{i(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.171)$$

$$H_{22} = \frac{i(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}. \quad (10.172)$$

Можно видеть, что

$$H_{21} = -iH_{11}; \quad (10.173)$$

$$H_{22} = iH_{12}. \quad (10.174)$$

Если рассмотрение последовательной передачи начинать с ячейки 2, содержащей среду 2 и границу 1, то на подходе к этой границе надо использовать соотношения (10.158)–(10.159) в сочетании с (10.160)–(10.161), в результате чего коэффициенты  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{21}$ ,  $H_{22}$  принимают вид:

$$H_{11} = e^{-ik_1 d_1}; \quad (10.175)$$

$$H_{12} = e^{ik_1 d_1}; \quad (10.176)$$

$$H_{21} = -ie^{-ik_1 d_1}; \quad (10.177)$$

$$H_{22} = ie^{ik_1 d_1}. \quad (10.178)$$

При этом соотношения (10.173)–(10.174) также выполняются.

Соотношения (10.169)–(10.172), используемые в случае 1, удобны тем, что они являются универсальными по отношению к применяемому для первой среды методам, прямому и усреднения. Так, при прямом методе надо полагать

$$\alpha_1 = -i \frac{1 - e^{-ik_1 d_1}}{1 + e^{-ik_1 d_1}}, \quad (10.179)$$

а при методе усреднения

$$\alpha_1 = \frac{k_1 d_1}{2}. \quad (10.180)$$

Можно видеть, что подстановка (10.179) в (10.169)–(10.172) приводит к соотношениям (10.175)–(10.178), тогда как соотношения (10.175)–(10.178), используемые в случае 2, такой универсальностью не обладают.

### 10.6.3. Конец структуры (среды $N - 1$ и $N$ )

Схема распространения волн вблизи конца структуры представлена на рис. 10.6. Контуры ячеек  $N - 1$  и  $N$  показаны точечными линиями.

Амплитуды волн:  $A_S$  — выходящей из структуры и  $B_P$  — входящей в структуру при координате  $x = x_N$ , можно связать с волновыми функциями  $U_{N-1}^{(N-1)}$  и  $V_{N-1}^{(N-1)}$ , выходящими из ячейки  $N - 1$ , или с волновыми функциями волновыми функциями  $U_N^{(N)}$  и  $V_N^{(N)}$ , выходящими из ячейки  $N$ . Рассмотрим эти случаи по отдельности.

#### СЛУЧАЙ 1.

Задача состоит в том, чтобы связать амплитуды  $A_S$  и  $B_P$  с волновыми функциями  $U_{N-1}^{(N-1)}$  и  $V_{N-1}^{(N-1)}$ .



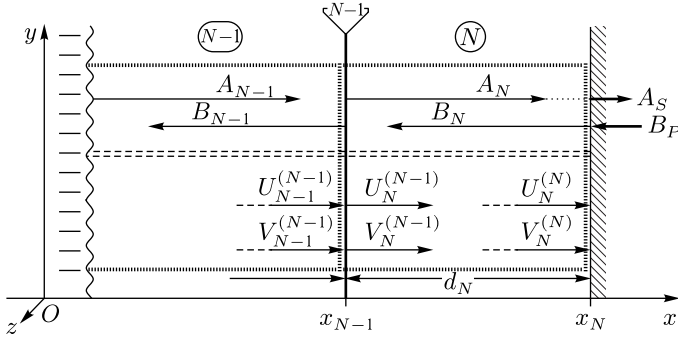


Рис. 10.6. Схема распространения волн вблизи конца структуры

Волновые функции первого и второго рода в среде  $N$  имеют вид:

$$U_N = A_N e^{-ik_N(x-x_{N-1})} + B_N e^{ik_N(x-x_N)}; \quad (10.181)$$

$$V_N = -iA_N e^{-ik_N(x-x_{N-1})} + iB_N e^{ik_N(x-x_N)}. \quad (10.182)$$

На границе  $N-1$  при  $x = x_{N-1}$  эти функции равны:

$$U_N^{(N-1)} = A_N + B_N e^{-ik_N d_N}; \quad (10.183)$$

$$V_N^{(N-1)} = -iA_N + iB_N e^{-ik_N d_N}. \quad (10.184)$$

Граничные условия на границе  $N-1$  при  $x = x_{N-1}$  имеют вид:

$$U_{N-1}^{(N-1)} = U_N^{(N-1)}; \quad (10.185)$$

$$k_{N-1} V_{N-1}^{(N-1)} = k_N V_N^{(N-1)}. \quad (10.186)$$

Подставляя (10.181)–(10.182) в граничные условия (10.185)–(10.186), получаем:

$$U_{N-1}^{(N-1)} = A_N + B_N e^{-ik_N d_N}; \quad (10.187)$$

$$V_{N-1}^{(N-1)} = -A_N i \frac{k_N}{k_{N-1}} + B_N i \frac{k_N}{k_{N-1}} e^{-ik_N d_N}. \quad (10.188)$$

Учитывая нормировку волн относительно точек исхода, получаем:

$$A_N = A_S e^{ik_N d_N}; \quad (10.189)$$

$$B_N = B_P. \quad (10.190)$$

Подставляя (10.189)–(10.190) в (10.187)–(10.188), получаем:

$$U_{N-1}^{(N-1)} = A_S e^{ik_N d_N} + B_P e^{-ik_N d_N}; \quad (10.191)$$

$$V_{N-1}^{(N-1)} = -A_S i \frac{k_N}{k_{N-1}} e^{ik_N d_N} + B_P i \frac{k_N}{k_{N-1}} e^{-ik_N d_N}. \quad (10.192)$$

Таким образом, искомые соотношения получены.

## СЛУЧАЙ 2.

Задача состоит в том, чтобы связать амплитуды  $A_S$  и  $B_P$  с волновыми функциями  $U_N^{(N)}$  и  $V_N^{(N)}$ .

Волновые функции первого и второго рода в среде  $N$  имеют вид:

$$U_N = A_N e^{-ik_N(x-x_{N-1})} + B_N e^{ik_N(x-x_N)}; \quad (10.193)$$

$$V_N = -iA_N e^{-ik_N(x-x_{N-1})} + iB_N e^{ik_N(x-x_N)}. \quad (10.194)$$

На внешней поверхности структуры при  $x = x_N$  эти функции равны:

$$U_N^{(N)} = A_N e^{-ik_N d_N} + B_N; \quad (10.195)$$

$$V_N^{(N)} = -iA_N e^{-ik_N d_N} + iB_N. \quad (10.196)$$

Учитывая нормировку волн относительно точек исхода, получаем:

$$A_N = A_S e^{ik_N d_N}; \quad (10.197)$$

$$B_N = B_P. \quad (10.198)$$

Подставляя (10.197)–(10.198) в (10.195)–(10.196), получаем:

$$U_N^{(N)} = A_S + B_P; \quad (10.199)$$

$$V_N^{(N)} = -iA_S + iB_P. \quad (10.200)$$

Таким образом, искомые соотношения получены.

При численном решении представляет интерес обратное соотношение, то есть выражение  $A_S$  и  $B_P$  через  $U_N^{(N)}$  и  $V_N^{(N)}$ . Рассматривая (10.199)–(10.200) как систему уравнений относительно  $A_S$  и  $B_P$ , получаем:

$$A_S = \frac{1}{2}(U_N^{(N)} + iV_N^{(N)}); \quad (10.201)$$

$$B_P = \frac{1}{2}(U_N^{(N)} - iV_N^{(N)}). \quad (10.202)$$

**10.6.4. Замечание относительно выходного конца структуры**

На выходном конце структуры волновые функции первого и второго рода определяются в среде  $N$ , то есть для их определения используется ячейка, включающая только границу  $N - 1$ . На этой границе граничные условия имеют традиционный вид и связывают волновые функции в двух средах  $N - 1$  и  $N$ . При этом волновые функции  $U_N^{(N)}$  и  $V_N^{(N)}$  на внешней поверхности структуры при  $x = x_N$  связаны с амплитудами внешних по отношению к структуре в целом волн  $A_S$  и  $B_P$  соотношениями (10.189)–(10.190). Связь же амплитуд  $U_N^{(N)}$  и  $V_N^{(N)}$  с амплитудами  $U_N^{(N)}$  и  $V_N^{(N)}$  обеспечивается соотношениями прямой передачи, универсальными для всех сред. Поэтому необходимость

введения новых параметров типа  $H_{11}$ ,  $H_{12}$  здесь отсутствует, то есть для определения амплитуд  $A_S$  и  $B_P$  сразу могут быть использованы соотношения (10.189)–(10.190), как это и сделано в настоящем рассмотрении.

## 10.7. Произвольное число сред

Рассмотрим развитие предложенного аппарата на случай произвольного числа сред.

### 10.7.1. Амплитуды выходящих волн. Передача во всех средах кроме первой и последней

Структура содержит  $N$  сред. В структуру входят волны с амплитудами  $A_P$  и  $B_P$ , из структуры выходят волны с амплитудами  $A_S$  и  $B_S$ . Задача состоит в том, чтобы выразить амплитуды выходящих волн  $A_S$  и  $B_S$  через амплитуды входящих волн  $A_P$  и  $B_P$ .

Имеются три пары соотношений:

волновые функции на границе 1

$$U_1^{(1)} = A_P e^{-ik_1 d_1} + B_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.203)$$

$$V_1^{(1)} = -iA_P e^{-ik_1 d_1} + iB_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.204)$$

соотношения прямой передачи для совокупности сред с 2 до  $N-1$

$$U_{N-1}^{(N-1)} = G_{11} U_1^{(1)} + G_{12} V_1^{(1)}; \quad (10.205)$$

$$V_{N-1}^{(N-1)} = G_{21} U_1^{(1)} + G_{22} V_1^{(1)}; \quad (10.206)$$

волновые функции на границе  $N-1$

$$U_{N-1}^{(N-1)} = A_S e^{ik_N d_N} + B_P e^{-ik_N d_N}; \quad (10.207)$$

$$V_{N-1}^{(N-1)} = -A_S i \frac{k_N}{k_{N-1}} e^{ik_N d_N} + B_P i \frac{k_N}{k_{N-1}} e^{-ik_N d_N}. \quad (10.208)$$

Подставляя (10.203)–(10.204) и (10.207)–(10.208) в (10.205)–(10.206), освобождаясь от дробей, приводя подобные члены и перенося подлежащие определению амплитуды в левую часть, а заданные — в правую, получаем систему уравнений для  $A_S$  и  $B_S$ :

$$\begin{aligned} A_S e^{ik_N d_N} - B_S (G_{11} + iG_{12}) e^{ik_1 d_1} = \\ = A_P (G_{11} - iG_{12}) e^{-ik_1 d_1} - B_P e^{-ik_N d_N}; \end{aligned} \quad (10.209)$$

$$\begin{aligned} A_S k_N e^{ik_N d_N} + B_S (G_{22} - iG_{21}) k_{N-1} e^{ik_1 d_1} = \\ = A_P (G_{22} + iG_{21}) k_{N-1} e^{-ik_1 d_1} + B_P k_N e^{-ik_N d_N}. \end{aligned} \quad (10.210)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$G = A_P(G_{11} - iG_{12})e^{-ik_1d_1} - B_P e^{-ik_N d_N}; \quad (10.211)$$

$$H = A_P(G_{22} + iG_{21})k_{N-1}e^{-ik_1d_1} + B_P k_N e^{-ik_N d_N}. \quad (10.212)$$

С этими обозначениями система (10.209)–(10.210) принимает вид:

$$A_S e^{ik_N d_N} - B_S(G_{11} + iG_{12})e^{ik_1d_1} = G; \quad (10.213)$$

$$A_S k_N e^{ik_N d_N} + B_S(G_{22} - iG_{21})k_{N-1}e^{ik_1d_1} = H. \quad (10.214)$$

Детерминанты этой системы имеют вид:

$$D_0 = [(G_{11}k_N + G_{22}k_{N-1}) + i(G_{12}k_N - G_{21}k_{N-1})]e^{ik_1d_1}e^{ik_N d_N}; \quad (10.215)$$

$$D_{AS} = [G(G_{22} - iG_{21})k_{N-1} + H(G_{11} + iG_{12})]e^{ik_1d_1}; \quad (10.216)$$

$$D_{BS} = (H - Gk_N)e^{ik_N d_N}. \quad (10.217)$$

Подставляя (10.211)–(10.212) в (10.215)–(10.217) и учитывая, что

$$A_S = \frac{D_{AS}}{D_0}; \quad (10.218)$$

$$B_S = \frac{D_{BS}}{D_0}, \quad (10.219)$$

получаем полное решение в виде:

$$A_S = A_P \frac{2(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})k_{N-1}}{(G_{11}k_N + G_{22}k_{N-1}) + i(G_{12}k_N - G_{21}k_{N-1})} e^{-ik_1d_1} e^{-ik_N d_N} + \\ + B_P \frac{(G_{11}k_N - G_{22}k_{N-1}) + i(G_{12}k_N + G_{21}k_{N-1})}{(G_{11}k_N + G_{22}k_{N-1}) + i(G_{12}k_N - G_{21}k_{N-1})} e^{-2ik_N d_N}; \quad (10.220)$$

$$B_S = A_P \frac{-(G_{11}k_N - G_{22}k_{N-1}) + i(G_{12}k_N + G_{21}k_{N-1})}{(G_{11}k_N + G_{22}k_{N-1}) + i(G_{12}k_N - G_{21}k_{N-1})} e^{-2ik_1d_1} + \\ + B_P \frac{2k_N}{(G_{11}k_N + G_{22}k_{N-1}) + i(G_{12}k_N - G_{21}k_{N-1})} e^{-ik_1d_1} e^{-ik_N d_N}. \quad (10.221)$$

### 10.7.2. Амплитуды выходящих волн при учете передачи во всех средах

Будем рассматривать  $N$  сред, разделенных  $N - 1$  границами. При этом, чтобы можно было пользоваться соотношениями прямой передачи, левую внешнюю поверхность структуры будем рассматривать как границу 0, а правую как границу  $N$ . При этом предположим, что последовательные подстановки соотношений прямой передачи между границами 1 и  $N$  уже выполнены и соответствующие коэффициенты связи получены.

Учитывая, что в структуру входят волны с амплитудами  $A_P$  и  $B_P$ , а выходят волны с амплитудами  $A_S$  и  $B_S$ , получаем три пары последовательных соотношений:

1) соотношения между волновыми функциями и амплитудами волн на левой границе структуры (раздел 10.6.1, формулы (10.154)–(10.155)):

$$U_1^{(1)} = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} A_P + \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} B_S; \quad (10.222)$$

$$V_1^{(1)} = -\frac{i(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} A_P + \frac{i(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} B_S; \quad (10.223)$$

2) результат последовательных подстановок соотношений прямой передачи между средами с 2 по  $N$  (раздел 10.4.1, формулы (10.101)–(10.102) при  $n = N$ ):

$$U_N^{(N)} = G_{11}^{[N]} U_1^{(1)} + G_{12}^{[N]} V_1^{(1)}; \quad (10.224)$$

$$V_N^{(N)} = G_{21}^{[N]} U_1^{(1)} + G_{22}^{[N]} V_1^{(1)}; \quad (10.225)$$

3) соотношения между волновыми функциями и амплитудами волн на правой границе структуры (раздел 10.6.3, формулы (10.199)–(10.200)):

$$U_N^{(N)} = A_S + B_P; \quad (10.226)$$

$$V_N^{(N)} = -iA_S + iB_P. \quad (10.227)$$

Запишем (10.222)–(10.223) в виде

$$U_1^{(1)} = H_{11} A_P + H_{12} B_S; \quad (10.228)$$

$$V_1^{(1)} = H_{21} A_P + H_{22} B_S, \quad (10.229)$$

для чего введем вспомогательные обозначения:

$$H_{11} = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.230)$$

$$H_{12} = \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.231)$$

$$H_{21} = -\frac{i(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.232)$$

$$H_{22} = \frac{i(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}. \quad (10.233)$$

Можно видеть, что

$$H_{21} = -iH_{11}; \quad (10.234)$$

$$H_{22} = iH_{12}. \quad (10.235)$$

Подставляя (10.226)–(10.227) и (10.230)–(10.233) с учетом (10.234)–(10.235) в (10.224)–(10.225), приводя в полученных

выражениях подобные члены и для простоты записи опуская у коэффициентов  $G$  верхний индекс  $N$ , получаем:

$$A_S + B_P = (G_{11} - iG_{12})H_{11} \cdot A_P + (G_{11} + iG_{12})H_{12}B_S; \quad (10.236)$$

$$A_S - B_P = (G_{22} + iG_{21})H_{11} \cdot A_P - (G_{22} - iG_{21})H_{12}B_S. \quad (10.237)$$

Складывая и вычитая эти выражения, находим  $A_S$  и  $B_P$ :

$$A_S = \frac{1}{2}[(G_{11} + G_{22}) - i(G_{12} - G_{21})]H_{11}A_P + \\ + \frac{1}{2}[(G_{11} - G_{22}) + i(G_{12} + G_{21})]H_{12}B_S; \quad (10.238)$$

$$B_P = \frac{1}{2}[(G_{11} - G_{22}) - i(G_{12} + G_{21})]H_{11}A_P + \\ + \frac{1}{2}[(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})]H_{12}B_S. \quad (10.239)$$

В этих выражениях входящими в структуру являются волны с амплитудами  $A_P$  и  $B_P$ , а выходящими — волны с амплитудами  $A_S$  и  $B_S$ . Однако главной целью решения задачи является выражение выходных амплитуд  $A_S$  и  $B_S$  через входные  $A_P$  и  $B_P$ , что и следует сделать.

Амплитуду волны  $B_S$  можно сразу найти из выражения (10.239). После этого подстановка полученного значения в (10.238) позволяет после приведения подобных членов найти также амплитуду  $A_S$ . В результате получаем:

$$A_S = A_P \frac{2(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} H_{11} + \\ + B_P \frac{(G_{11} - G_{22}) + i(G_{12} + G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})}; \quad (10.240)$$

$$B_S = -A_P \frac{(G_{11} - G_{22}) - i(G_{12} + G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} \frac{H_{11}}{H_{12}} + \\ + B_P \frac{2}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} \frac{1}{H_{12}}. \quad (10.241)$$

## 10.8. Две среды

Рассмотрим применение развитого аппарата для некоторых конкретных случаев. Начнем с наиболее простой задачи о структуре, состоящей из всего двух сред.

### 10.8.1. Амплитуды выходящих волн при передаче в обеих средах

Будем рассматривать две среды 1 и 2, разделенные одной границей 1. При этом левую внешнюю поверхность структуры будем рассматривать как границу 0, а правую как границу 2. То есть получаем структуру, состоящую из двух сред, толщины каждой из которых являются ограниченными и могут меняться.

В структуру входят волны с амплитудами  $A_P$  и  $B_P$ , а выходят волны с амплитудами  $A_S$  и  $B_S$ . Для этого случая получаем три пары последовательных соотношений:

1) соотношения между волновыми функциями и амплитудами волн на левой границе структуры (раздел 10.6, формулы (10.154)–(10.155))

$$U_1^{(1)} = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} A_P + \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} B_S; \quad (10.242)$$

$$V_1^{(1)} = -\frac{i(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} A_P + \frac{i(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} B_S; \quad (10.243)$$

2) соотношения прямой передачи для среды 2 (раздел 10.4.1, формулы (10.95)–(10.96) при  $n = 2$ )

$$U_2^{(2)} = \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} U_1^{(1)} + \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} V_1^{(1)}; \quad (10.244)$$

$$V_2^{(2)} = -\frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} U_1^{(1)} + \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} V_1^{(1)}; \quad (10.245)$$

3) соотношения между волновыми функциями и амплитудами волн на правой границе структуры (раздел 10.6.3, формулы (10.199)–(10.200) при  $N = 2$ )

$$U_2^{(2)} = A_S + B_P; \quad (10.246)$$

$$V_2^{(2)} = -iA_S + iB_P. \quad (10.247)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$H_{11} = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.248)$$

$$H_{12} = \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.249)$$

а также

$$G_{11} = \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2}; \quad (10.250)$$

$$G_{12} = \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2}; \quad (10.251)$$

$$G_{21} = -\frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2}; \quad (10.252)$$

$$G_{22} = \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2}. \quad (10.253)$$

При этих обозначениях соотношения (10.242)–(1.247) принимают вид:

$$U_1^{(1)} = H_{11}A_P + H_{12}B_S; \quad (10.254)$$

$$V_1^{(1)} = -iH_{11}A_P + iH_{12}B_S, \quad (10.255)$$

$$U_2^{(2)} = G_{11}U_1^{(1)} + G_{12}V_1^{(1)}; \quad (10.256)$$

$$V_2^{(2)} = G_{21}U_1^{(1)} + G_{22}V_1^{(1)}; \quad (10.257)$$

$$U_2^{(2)} = A_S + B_P; \quad (10.258)$$

$$V_2^{(2)} = -iA_S + iB_P. \quad (10.259)$$

Эти соотношения аналогичны соотношениям, полученным в разделе 10.7.2, (формулы (10.228)–(10.229), (10.224)–(10.225), (10.226)–(10.227)), которые позволяют найти амплитуды волн на правой границе структуры  $A_S$  и  $B_P$  через амплитуды волн на ее левой границе  $A_P$  и  $B_S$ :

$$A_S = \frac{1}{2}[(G_{11} + G_{22}) - i(G_{12} - G_{21})]H_{11}A_P + \\ + \frac{1}{2}[(G_{11} - G_{22}) + i(G_{12} + G_{21})]H_{12}B_S; \quad (10.260)$$

$$B_P = \frac{1}{2}[(G_{11} - G_{22}) - i(G_{12} + G_{21})]H_{11}A_P + \\ + \frac{1}{2}[(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})]H_{12}B_S. \quad (10.261)$$

Из этих выражений в разделе 10.7.2 (формулы (10.240), (10.241)) получены выражения для амплитуд выходящих из структуры волн  $A_S$  и  $B_S$  через амплитуды входящих волн  $A_P$  и  $B_P$ , имеющие вид:

$$A_S = A_P \frac{2(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} H_{11} + \\ + B_P \frac{(G_{11} - G_{22}) + i(G_{12} + G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})}; \quad (10.262)$$

$$B_S = -A_P \frac{(G_{11} - G_{22}) - i(G_{12} + G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} \frac{H_{11}}{H_{12}} + \\ + B_P \frac{2}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} \frac{1}{H_{12}}. \quad (10.263)$$

Подставляя (10.248)–(10.253) в (10.262)–(10.263), получаем амплитуды выходящих из структуры волн  $A_S$  и  $B_S$  через амплитуды входящих волн  $A_P$  и  $B_P$  в явном виде:

$$A_S = A_P \frac{(1 + \alpha_2^2)(1 - i\alpha_1)^2}{(1 + \alpha_1^2)(1 + i\alpha_2)^2} \frac{2k_1}{k_1 + k_2} - B_P \frac{(1 - i\alpha_2)^2}{(1 + i\alpha_2)^2} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \quad (10.264)$$

$$B_S = A_P \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{(1 + i\alpha_1)^2} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} + B_P \frac{(1 + \alpha_2^2)(1 + \alpha_1^2)}{(1 + i\alpha_2)^2(1 + i\alpha_1)^2} \frac{2k_2}{k_1 + k_2}. \quad (10.265)$$



**Замечание.** В выражения (10.264)–(10.265) входят в качестве параметров величины  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , относящиеся к средам 1 и 2. Приведем их выражения через волновые числа и толщины сред при прямом методе и методе усреднения.

При прямом методе в среде 1

$$\alpha_1 = -i \frac{1 - e^{-ik_1 d_1}}{1 + e^{-ik_1 d_1}}. \quad (10.266)$$

При прямом методе в среде 2

$$\alpha_2 = -i \frac{1 - e^{-ik_2 d_2}}{1 + e^{-ik_2 d_2}}. \quad (10.267)$$

При методе усреднения в среде 1

$$\alpha_1 = \frac{k_1 d_1}{2}. \quad (10.268)$$

При методе усреднения в среде 2

$$\alpha_2 = \frac{k_2 d_2}{2}. \quad (10.269)$$

## 10.9. Три среды

Усложним теперь предыдущую задачу обращением к случаю структуры из трех сред.

### 10.9.1. Амплитуды выходящих волн. Передача во второй среде

Структура содержит три среды. В структуру входят волны с амплитудами  $A_P$  и  $B_P$ , из структуры выходят волны с амплитудами  $A_S$  и  $B_S$ . Задача состоит в том, чтобы выразить амплитуды выходящих волн  $A_S$  и  $B_S$  через амплитуды входящих волн  $A_P$  и  $B_P$ .

Имеются три пары соотношений:

волновые функции на границе 1

$$U_1^{(1)} = A_P e^{-ik_1 d_1} + B_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.270)$$

$$V_1^{(1)} = -i A_P e^{-ik_1 d_1} + i B_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.271)$$

соотношения прямой передачи для ячейки 2

$$U_2^{(2)} = \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} U_1^{(1)} + \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} V_1^{(1)}; \quad (10.272)$$

$$V_2^{(2)} = -\frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} U_1^{(1)} + \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} V_1^{(1)}; \quad (10.273)$$

волновые функции на границе 2

$$U_2^{(2)} = A_S e^{ik_3 d_3} + B_P e^{-ik_3 d_3}; \quad (10.274)$$

$$V_2^{(2)} = -A_S i \frac{k_3}{k_2} e^{ik_3 d_3} + B_P i \frac{k_3}{k_2} e^{-ik_3 d_3}. \quad (10.275)$$

Подставим (10.270)–(10.271) и (10.274)–(10.275) в (10.272)–(10.273), умножим все на  $(1 + \alpha_2^2)k_2$  и второе из получившихся соотношений на  $i$ , перенесем слагаемые, содержащие  $A_S$  и  $B_S$ , в левую часть, а остальные — в правую. В результате получаем систему уравнений относительно  $A_S$  и  $B_S$ :

$$\begin{aligned} A_S(1 + \alpha_2^2)k_2 e^{ik_3 d_3} - B_S[(1 - \alpha_2^2)k_2 + i2\alpha_2 k_1] e^{ik_1 d_1} = \\ = A_P[(1 - \alpha_2^2)k_2 - i2\alpha_2 k_1] e^{-ik_1 d_1} - B_P(1 + \alpha_2^2)k_2 e^{-ik_3 d_3}; \end{aligned} \quad (10.276)$$

$$\begin{aligned} A_S(1 + \alpha_2^2)k_3 e^{ik_3 d_3} + B_S[(1 - \alpha_2^2)k_1 + i2\alpha_2 k_2] e^{ik_1 d_1} = \\ = A_P[(1 - \alpha_2^2)k_1 - i2\alpha_2 k_2] e^{-ik_1 d_1} + B_P(1 + \alpha_2^2)k_3 e^{-ik_3 d_3}. \end{aligned} \quad (10.277)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$G = A_P[(1 - \alpha_2^2)k_2 - i2\alpha_2 k_1] e^{-ik_1 d_1} - B_P(1 + \alpha_2^2)k_2 e^{-ik_3 d_3}; \quad (10.278)$$

$$H = A_P[(1 - \alpha_2^2)k_1 - i2\alpha_2 k_2] e^{-ik_1 d_1} + B_P(1 + \alpha_2^2)k_3 e^{-ik_3 d_3}. \quad (10.279)$$

С этими обозначениями система (10.276)–(10.277) принимает вид:

$$A_S(1 + \alpha_2^2)k_2 e^{ik_3 d_3} - B_S[(1 - \alpha_2^2)k_2 + i2\alpha_2 k_1] e^{ik_1 d_1} = G; \quad (10.280)$$

$$A_S(1 + \alpha_2^2)k_3 e^{ik_3 d_3} + B_S[(1 - \alpha_2^2)k_1 + i2\alpha_2 k_2] e^{ik_1 d_1} = H. \quad (10.281)$$

Детерминанты этой системы имеют вид:

$$D_0 = (1 + \alpha_2^2)[(1 - \alpha_2^2)k_2(k_1 + k_3) + i2\alpha_2(k_2^2 + k_1 k_3)] e^{ik_1 d_1} e^{ik_3 d_3}; \quad (10.282)$$

$$D_{AS} = \{G[(1 - \alpha_2^2)k_1 + i2\alpha_2 k_2] + H[(1 - \alpha_2^2)k_2 + i2\alpha_2 k_1]\} e^{ik_1 d_1} \quad (10.283)$$

$$D_{BS} = (1 + \alpha_2^2)(-Gk_3 + Hk_2) e^{ik_3 d_3}. \quad (10.284)$$

Подставляя  $G$  и  $H$  в соответствии с (10.278)–(10.279), получаем:

$$\begin{aligned} D_{AS} = A_P 2(1 + \alpha_2^2)^2 k_1 k_2 + B_P(1 + \alpha_2^2) \times \\ \times [-(1 - \alpha_2^2)k_2(k_1 - k_3) + i2\alpha_2(k_1 k_3 - k_2^2)] e^{ik_1 d_1} e^{-ik_3 d_3} \end{aligned} \quad (10.285)$$

$$\begin{aligned} D_{BS} = A_P(1 + \alpha_2^2)[(1 - \alpha_2^2)k_2(k_1 - k_3) + i2\alpha_2(k_1 k_3 - k_2^2)] \times \\ \times e^{-ik_1 d_1} e^{ik_3 d_3} + B_P 2(1 + \alpha_2^2)^2 k_2 k_3. \end{aligned} \quad (10.286)$$

Учитывая, что

$$A_S = \frac{D_{AS}}{D_0}; \quad (10.287)$$

$$B_S = \frac{D_{BS}}{D_0}, \quad (10.288)$$

получаем амплитуды выходящих из структуры волн, выраженные через амплитуды волн входящих:

$$A_S = A_P \frac{2(1 + \alpha_2^2)k_1k_2}{(1 - \alpha_2^2)k_2(k_1 + k_3) + i2\alpha_2(k_1k_3 + k_2^2)} e^{-ik_1d_1} e^{-ik_3d_3} + \\ + B_P \frac{-(1 - \alpha_2^2)k_2(k_1 - k_3) + i2\alpha_2(k_1k_3 - k_2^2)}{(1 - \alpha_2^2)k_2(k_1 + k_3) + i2\alpha_2(k_1k_3 + k_2^2)} e^{-2ik_3d_3}; \quad (10.289)$$

$$B_S = A_P \frac{(1 - \alpha_2^2)k_2(k_1 - k_3) + i2\alpha_2(k_1k_3 - k_2^2)}{(1 - \alpha_2^2)k_2(k_1 + k_3) + i2\alpha_2(k_1k_3 + k_2^2)} e^{-2ik_1d_1} + \\ + B_P \frac{2(1 + \alpha_2^2)k_2k_3}{(1 - \alpha_2^2)k_2(k_1 + k_3) + i2\alpha_2(k_1k_3 + k_2^2)} e^{-ik_1d_1} e^{-ik_3d_3}. \quad (10.290)$$

Эти выражения справедливы как при прямом методе, так и при методе усреднения. При этом в них должно быть подставлено соответствующее значение  $\alpha_2$ :

при прямом методе

$$\alpha_2 = -i \frac{1 - e^{-ik_2d_2}}{1 + e^{-ik_2d_2}}; \quad (10.291)$$

при методе усреднения

$$\alpha_2 = \frac{k_2d_2}{2}. \quad (10.292)$$

### 10.9.2. Амплитуды выходящих волн в общем виде для методов прямого и усреднения. Передача во второй среде

Структура содержит три среды. В структуру входят волны с амплитудами  $A_P$  и  $B_P$ , из структуры выходят волны с амплитудами  $A_S$  и  $B_S$ . Задача состоит в том, чтобы выразить амплитуды выходящих волн  $A_S$  и  $B_S$  через амплитуды входящих волн  $A_P$  и  $B_P$ .

Имеются три пары соотношений:

волновые функции на границе 1

$$U_1^{(1)} = A_P e^{-ik_1d_1} + B_S e^{ik_1d_1}; \quad (10.293)$$

$$V_1^{(1)} = -iA_P e^{-ik_1d_1} + iB_S e^{ik_1d_1}; \quad (10.294)$$

соотношения прямой передачи для среды 2

$$U_2^{(2)} = G_{11}U_1^{(1)} + G_{12}V_1^{(1)}; \quad (10.295)$$

$$V_2^{(2)} = G_{21}U_1^{(1)} + G_{22}V_1^{(1)}; \quad (10.296)$$

волновые функции на границе 2

$$U_2^{(2)} = A_S e^{ik_3 d_3} + B_P e^{-ik_3 d_3}; \quad (10.297)$$

$$V_2^{(2)} = -A_S i \frac{k_3}{k_2} e^{ik_3 d_3} + B_P i \frac{k_3}{k_2} e^{-ik_3 d_3}. \quad (10.298)$$

Подставляя (10.293)–(10.294) и (10.297)–(10.298) в (10.295)–(10.296), освобождаясь от дробей, приводя подобные члены и перенося подлежащие определению амплитуды в левую часть, а заданные — в правую, получаем систему уравнений для  $A_S$  и  $B_S$ :

$$\begin{aligned} A_S e^{ik_3 d_3} - B_S (G_{11} + iG_{12}) e^{ik_1 d_1} &= \\ &= A_P (G_{11} - iG_{12}) e^{-ik_1 d_1} - B_P e^{-ik_3 d_3}; \end{aligned} \quad (10.299)$$

$$\begin{aligned} A_S k_3 e^{ik_3 d_3} + B_S (G_{22} - iG_{21}) k_2 e^{ik_1 d_1} &= \\ &= A_P (G_{22} + iG_{21}) k_2 e^{-ik_1 d_1} + B_P k_3 e^{-ik_3 d_3}. \end{aligned} \quad (10.300)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} A_S = A_P \frac{2(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})k_2}{(G_{11}k_3 + G_{22}k_2) + i(G_{12}k_3 - G_{21}k_2)} e^{-ik_1 d_1} e^{-ik_3 d_3} + \\ + B_P \frac{(G_{11}k_3 - G_{22}k_2) + i(G_{12}k_3 + G_{21}k_2)}{(G_{11}k_3 + G_{22}k_2) + i(G_{12}k_3 - G_{21}k_2)} e^{-2ik_3 d_3}; \end{aligned} \quad (10.301)$$

$$\begin{aligned} B_S = A_P \frac{-(G_{11}k_3 - G_{22}k_2) + i(G_{12}k_3 + G_{21}k_2)}{(G_{11}k_3 + G_{22}k_2) + i(G_{12}k_3 - G_{21}k_2)} e^{-2ik_1 d_1} + \\ + B_P \frac{2k_3}{(G_{11}k_3 + G_{22}k_2) + i(G_{12}k_3 - G_{21}k_2)} e^{-ik_1 d_1} e^{-ik_3 d_3}. \end{aligned} \quad (10.302)$$

КОЭФФИЦИЕНТЫ  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{21}$ ,  $G_{22}$ .

Соотношения прямой передачи для среды 2, полученные в соответствии с процедурой, описанной в разделе 10.4.1 (формулы (10.96), (10.97)), имеют вид:

$$U_2^{(2)} = \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} U_1^{(1)} + \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} V_1^{(1)}; \quad (10.303)$$

$$V_2^{(2)} = -\frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} U_1^{(1)} + \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} V_1^{(1)}. \quad (10.304)$$

Сравнивая эти выражения с (10.297)–(10.298), получаем:

$$G_{11} = \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2}; \quad (10.305)$$

$$G_{12} = \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2}; \quad (10.306)$$

$$G_{21} = -\frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2}; \quad (10.307)$$

$$G_{22} = \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2}. \quad (10.308)$$

### 10.9.3. Амплитуды выходящих волн. Передача во второй и третьей средах

Будем рассматривать три среды 1, 2 и 3, разделенные двумя границами 1 и 2, причем правую внешнюю поверхность структуры, ограничивающую среду 3, будем рассматривать как границу 3.

Для трех сред с тремя границами в соответствии с соотношениями прямой передачи (раздел 10.4.1 (формулы (10.96), (10.97)), получаем три пары последовательных соотношений:

$$U_1^{(1)} = A_P e^{-ik_1 d_1} + B_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.309)$$

$$V_1^{(1)} = -iA_P e^{-ik_1 d_1} + iB_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.310)$$

$$U_2^{(2)} = \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} U_1^{(1)} + \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} V_1^{(1)}; \quad (10.311)$$

$$V_2^{(2)} = -\frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} U_1^{(1)} + \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} V_1^{(1)}; \quad (10.312)$$

$$U_3^{(3)} = \frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} U_2^{(2)} + \frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} \frac{k_2}{k_3} V_2^{(2)}; \quad (10.313)$$

$$V_3^{(3)} = -\frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} U_2^{(2)} + \frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} \frac{k_2}{k_3} V_2^{(2)}. \quad (10.314)$$

Подставляя (10.311)–(10.312) в (10.313)–(10.314), получаем:

$$U_3^{(3)} = \frac{1}{(1 + \alpha_3^2)(1 + \alpha_2^2)} \left\{ \left[ (1 - \alpha_3^2)(1 - \alpha_2^2) - 2\alpha_3 2\alpha_2 \frac{k_2}{k_3} \right] U_1^{(1)} + \frac{k_1}{k_2} \left[ (1 - \alpha_3^2) 2\alpha_2 + 2\alpha_3 (1 - \alpha_2^2) \frac{k_2}{k_3} \right] V_1^{(1)} \right\}; \quad (10.315)$$

$$V_3^{(3)} = -\frac{1}{(1 + \alpha_3^2)(1 + \alpha_2^2)} \left\{ \left[ 2\alpha_3 (1 - \alpha_2^2) + (1 - \alpha_3^2) 2\alpha_2 \frac{k_2}{k_3} \right] U_1^{(1)} + \frac{k_1}{k_2} \left[ 2\alpha_3 2\alpha_2 - (1 - \alpha_3^2)(1 - \alpha_2^2) \frac{k_2}{k_3} \right] V_1^{(1)} \right\}. \quad (10.316)$$

Введем обозначения для коэффициентов:

$$G_{11} = \frac{(1 - \alpha_3^2)(1 - \alpha_2^2)k_3 - 2\alpha_3 2\alpha_2 k_2}{(1 + \alpha_3^2)(1 + \alpha_2^2)k_3}; \quad (10.317)$$

$$G_{12} = \frac{(1 - \alpha_3^2) 2\alpha_2 k_3 + 2\alpha_3 (1 - \alpha_2^2) k_2}{(1 + \alpha_3^2)(1 + \alpha_2^2)k_3} \frac{k_1}{k_2}; \quad (10.318)$$

$$G_{21} = -\frac{2\alpha_3 (1 - \alpha_2^2) k_3 + (1 - \alpha_3^2) 2\alpha_2 k_2}{(1 + \alpha_3^2)(1 + \alpha_2^2)k_3}; \quad (10.319)$$

$$G_{22} = -\frac{2\alpha_3 2\alpha_2 k_3 - (1 - \alpha_3^2)(1 - \alpha_2^2) k_2}{(1 + \alpha_3^2)(1 + \alpha_2^2)k_3} \frac{k_1}{k_2}. \quad (10.320)$$

С этими обозначениями соотношения (10.315)–(10.316) принимают вид:

$$U_3^{(3)} = G_{11}U_1^{(1)} + G_{12}V_1^{(1)}; \quad (10.321)$$

$$V_3^{(3)} = G_{21}U_1^{(1)} + G_{22}V_1^{(1)}. \quad (10.322)$$

Для среды 3 (в соответствии с разделом 10.6.2, формулы (10.165), (10.166)) имеется связь между волновыми функциями на границе 3 и амплитудами волн на этой границе:

$$U_3^{(3)} = A_S + B_P; \quad (10.323)$$

$$V_3^{(3)} = -iA_S + iB_P. \quad (10.324)$$

Подставляя эти выражения в (10.321)–(10.322) и умножая второе выражение на  $i$ , получаем:

$$A_S + B_P = G_{11}U_1^{(1)} + G_{12}V_1^{(1)}; \quad (10.325)$$

$$A_S - B_P = iG_{21}U_1^{(1)} + iG_{22}V_1^{(1)}. \quad (10.326)$$

Подставляя в эти выражения волновые функции в среде 1 в соответствии с (10.309)–(10.310) и приводя подобные члены, получаем:

$$A_S + B_P = (G_{11} - iG_{12})A_P e^{-ik_1 d_1} + (G_{11} + iG_{12})B_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.327)$$

$$A_S - B_P = (G_{22} + iG_{21})A_P e^{-ik_1 d_1} - (G_{22} - iG_{21})B_S e^{ik_1 d_1}. \quad (10.328)$$

Складывая и вычитая эти выражения, после чего приводя подобные члены, получаем:

$$A_S = \frac{1}{2}[(G_{11} + G_{22}) - i(G_{12} - G_{21})]A_P e^{-ik_1 d_1} + \frac{1}{2}[(G_{11} - G_{22}) + i(G_{12} + G_{21})]B_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.329)$$

$$B_P = \frac{1}{2}[(G_{11} - G_{22}) - i(G_{12} + G_{21})]A_P e^{-ik_1 d_1} + \frac{1}{2}[(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})]B_S e^{ik_1 d_1}. \quad (10.330)$$

В этих выражениях входящими в структуру являются волны с амплитудами  $A_P$  и  $B_P$ , а выходящими — волны с амплитудами  $A_S$  и  $B_S$ . Главной целью решения задачи является выражение выходных амплитуд  $A_S$  и  $B_S$  через входные  $A_P$  и  $B_P$ .

Амплитуду волны  $B_S$  можно сразу найти из выражения (10.330). После чего подстановка полученного значения в (10.329) позволяет после приведения подобных членов найти также амплитуду  $A_S$ . В результате получаем:

$$A_S = A_P \frac{2(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} e^{-ik_1 d_1} + B_P \frac{(G_{11} - G_{22}) + i(G_{12} + G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})}; \quad (10.331)$$

$$B_S = -A_P \frac{(G_{11} - G_{22}) - i(G_{12} + G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} e^{-2ik_1 d_1} + \\ + B_P \frac{2}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} e^{-ik_1 d_1}. \quad (10.332)$$

**Замечание.** В выражения (10.317)–(10.320) для коэффициентов  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{21}$ ,  $G_{22}$  входят в качестве параметров величины  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , относящиеся к средам 2 и 3. Приведем их выражения через волновые числа и толщины сред при прямом методе и методе усреднения.

При прямом методе в средах 2 и 3

$$\alpha_2 = -i \frac{1 - e^{-ik_2 d_2}}{1 + e^{-ik_2 d_2}}; \quad (10.333)$$

$$\alpha_3 = -i \frac{1 - e^{-ik_3 d_3}}{1 + e^{-ik_3 d_3}}. \quad (10.334)$$

При методе усреднения в среде 2

$$\alpha_2 = \frac{k_2 d_2}{2}. \quad (10.335)$$

При методе усреднения в среде 3

$$\alpha_3 = \frac{k_3 d_3}{2}. \quad (10.336)$$

#### 10.9.4. Амплитуды выходящих волн. Передача во всех средах

Будем рассматривать три среды 1, 2 и 3, разделенные двумя границами 1 и 2, причем левую внешнюю поверхность структуры, ограничивающую слева среду 1, будем рассматривать как границу 0, а правую внешнюю поверхность, ограничивающую среду 3 — как границу 3.

Для этого случая имеем следующие соотношения:

1) соотношения между волновыми функциями и амплитудами волн на левой границе структуры (раздел 10.6.1, формулы (10.154)–(10.155))

$$U_1^{(1)} = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} A_P + \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} B_S; \quad (10.337)$$

$$V_1^{(1)} = -\frac{i(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} A_P + \frac{i(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} B_S; \quad (10.338)$$

2) соотношения прямой передачи для среды 2 (раздел 10.4.1, формулы (10.95)–(10.96) при  $n = 2$ )

$$U_2^{(2)} = \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} U_1^{(1)} + \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} V_1^{(1)}; \quad (10.339)$$

$$V_2^{(2)} = -\frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} U_1^{(1)} + \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} V_1^{(1)}; \quad (10.340)$$

3) соотношения прямой передачи для среды 3 (раздел 10.4.1, формулы (10.95)–(10.96) при  $n = 3$ )

$$U_3^{(3)} = \frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} U_2^{(2)} + \frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} \frac{k_2}{k_3} V_2^{(2)}; \quad (10.341)$$

$$V_3^{(3)} = -\frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} U_2^{(2)} + \frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} \frac{k_2}{k_3} V_2^{(2)}; \quad (10.342)$$

4) соотношения между волновыми функциями и амплитудами волн на правой границе структуры (раздел 10.6.3, формулы (10.185)–(10.186))

$$U_3^{(3)} = A_S + B_P; \quad (10.343)$$

$$V_3^{(3)} = -iA_S + iB_P. \quad (10.344)$$

Аналогично разделу 10.7.2, выполним упрощающие преобразования с помощью введения вспомогательных обозначений.

Запишем (10.337)–(10.338) в виде

$$U_1^{(1)} = H_{11}A_P + H_{12}B_S; \quad (10.345)$$

$$V_1^{(1)} = H_{21}A_P + H_{22}B_S, \quad (10.346)$$

где, подобно (10.230)–(10.235), имеем:

$$H_{11} = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.347)$$

$$H_{12} = \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.348)$$

$$H_{21} = -\frac{i(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} = -iH_{11}; \quad (10.349)$$

$$H_{22} = \frac{i(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2} = iH_{12}. \quad (10.350)$$

Подставляя (10.339)–(10.340) в (10.341)–(10.342), получаем:

$$U_3^{(3)} = G_{11}U_1^{(1)} + G_{12}V_1^{(1)}; \quad (10.351)$$

$$V_3^{(3)} = G_{21}U_1^{(1)} + G_{22}V_1^{(1)}, \quad (10.352)$$

где

$$G_{11} = \frac{(1 - \alpha_3^2)(1 - \alpha_2^2)k_3 - 2\alpha_3 2\alpha_2 k_2}{(1 + \alpha_3^2)(1 + \alpha_2^2)k_3}; \quad (10.353)$$

$$G_{12} = \frac{(1 - \alpha_3^2)2\alpha_2 k_3 + 2\alpha_3(1 - \alpha_2^2)k_2}{(1 + \alpha_3^2)(1 + \alpha_2^2)k_3} \frac{k_1}{k_2}; \quad (10.354)$$

$$G_{21} = -\frac{2\alpha_3(1 - \alpha_2^2)k_3 + (1 - \alpha_3^2)2\alpha_2 k_2}{(1 + \alpha_3^2)(1 + \alpha_2^2)k_3}; \quad (10.355)$$

$$G_{22} = -\frac{2\alpha_3 2\alpha_2 k_3 - (1 - \alpha_3^2)(1 - \alpha_2^2)k_2}{(1 + \alpha_3^2)(1 + \alpha_2^2)k_3} \frac{k_1}{k_2}. \quad (10.356)$$



В результате, в соответствии с (10.345)–(10.346), (10.351)–(10.352) и (10.343)–(10.344), получаем систему из шести уравнений, которую запишем здесь в едином комплексе:

$$U_1^{(1)} = H_{11}A_P + H_{12}B_S; \quad (10.357)$$

$$V_1^{(1)} = H_{21}A_P + H_{22}B_S; \quad (10.358)$$

$$U_3^{(3)} = G_{11}U_1^{(1)} + G_{12}V_1^{(1)}; \quad (10.359)$$

$$V_3^{(3)} = G_{21}U_1^{(1)} + G_{22}V_1^{(1)}; \quad (10.360)$$

$$U_3^{(3)} = A_S + B_P; \quad (10.361)$$

$$V_3^{(3)} = -iA_S + iB_P. \quad (10.362)$$

Здесь величины  $A_P$  и  $B_P$  являются заданными,  $A_S$  и  $B_S$  — неизвестными, а все остальные — определяются параметрами сред.

Решая эту систему аналогично разделу 10.7.2 (подобно (10.240)–(10.241)), находим амплитуды выходящих волн  $A_S$  и  $B_S$  через амплитуды входящих  $A_P$  и  $B_P$ :

$$A_S = A_P \frac{2(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} H_{11} + B_P \frac{(G_{11} - G_{22}) + i(G_{12} + G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})}; \quad (10.363)$$

$$B_S = -A_P \frac{(G_{11} - G_{22}) - i(G_{12} + G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} \frac{H_{11}}{H_{12}} + B_P \frac{2}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} \frac{1}{H_{12}}, \quad (10.364)$$

где  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{21}$ ,  $G_{22}$  определяются формулами (10.353)–(10.356), параметры  $H_{11}$  и  $H_{12}$  — формулами (10.347)–(10.348), а входящие в эти параметры величины  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , относящиеся к средам 1, 2, 3, при методах прямом и усреднения определяются следующим образом:

при прямом методе

$$\alpha_1 = -i \frac{1 - e^{-ik_1 d_1}}{1 + e^{-ik_1 d_1}}; \quad (10.365)$$

$$\alpha_2 = -i \frac{1 - e^{-ik_2 d_2}}{1 + e^{-ik_2 d_2}}; \quad (10.366)$$

$$\alpha_3 = -i \frac{1 - e^{-ik_3 d_3}}{1 + e^{-ik_3 d_3}}; \quad (10.367)$$

при методе усреднения

$$\alpha_1 = \frac{k_1 d_1}{2}. \quad (10.368)$$

$$\alpha_2 = \frac{k_2 d_2}{2}. \quad (10.369)$$

$$\alpha_3 = \frac{k_3 d_3}{2}. \quad (10.370)$$

Выражения (10.365)–(10.370) могут использоваться в любых сочетаниях, определяемых именно тем методом, который применяется в данной конкретной среде.

## 10.10. Четыре среды

Как показано в предыдущих разделах, переход от двух сред к трем привел к появлению ряда особенностей, заметно усложнивших задачу. Добавим еще одну среду и рассмотрим задачу теперь уже для четырех сред.

### 10.10.1. Амплитуды выходящих волн. Передача во второй и третьей средах

Структура содержит четыре среды. В структуру входят волны с амплитудами  $A_P$  и  $B_P$ , из структуры выходят волны с амплитудами  $A_S$  и  $B_S$ . Задача состоит в том, чтобы выразить амплитуды выходящих волн  $A_S$  и  $B_S$  через амплитуды входящих волн  $A_P$  и  $B_P$ .

Имеются три пары соотношений:

волновые функции на границе 1

$$U_1^{(1)} = A_P e^{-ik_1 d_1} + B_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.371)$$

$$V_1^{(1)} = -iA_P e^{-ik_1 d_1} + iB_S e^{ik_1 d_1}; \quad (10.372)$$

соотношения прямой передачи для совокупности сред 2 и 3

$$U_3^{(3)} = G_{11} U_1^{(1)} + G_{12} V_1^{(1)}; \quad (10.373)$$

$$V_3^{(3)} = G_{21} U_1^{(1)} + G_{22} V_1^{(1)}; \quad (10.374)$$

волновые функции на границе 3

$$U_3^{(3)} = A_S e^{ik_4 d_4} + B_P e^{-ik_4 d_4}; \quad (10.375)$$

$$V_3^{(3)} = -A_S i \frac{k_4}{k_3} e^{ik_4 d_4} + B_P i \frac{k_4}{k_3} e^{-ik_4 d_4}. \quad (10.376)$$

Подставляя (10.371)–(10.372) и (10.375)–(10.376) в (10.373)–(10.374), освобождаясь от дробей, приводя подобные члены и перенося подлежащие определению амплитуды в левую часть, а заданные — в правую, получаем систему уравнений для  $A_S$  и  $B_S$ :

$$\begin{aligned} A_S e^{ik_4 d_4} - B_S (G_{11} + iG_{12}) e^{ik_1 d_1} = \\ = A_P (G_{11} - iG_{12}) e^{-ik_1 d_1} - B_P e^{-ik_4 d_4}; \end{aligned} \quad (10.377)$$

$$\begin{aligned} A_S k_4 e^{ik_4 d_4} + B_S (G_{22} - iG_{21}) k_3 e^{ik_1 d_1} = \\ = A_P (G_{22} + iG_{21}) k_3 e^{-ik_1 d_1} + B_P k_4 e^{-ik_4 d_4}. \end{aligned} \quad (10.378)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$A_S = A_P \frac{2(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})k_3}{(G_{11}k_4 + G_{22}k_3) + i(G_{12}k_4 - G_{21}k_3)} e^{-ik_1d_1} e^{-ik_4d_4} + \\ + B_P \frac{(G_{11}k_4 - G_{22}k_3) + i(G_{12}k_4 + G_{21}k_3)}{(G_{11}k_4 + G_{22}k_3) + i(G_{12}k_4 - G_{21}k_3)} e^{-2ik_4d_4}; \quad (10.379)$$

$$B_S = A_P \frac{-(G_{11}k_4 - G_{22}k_3) + i(G_{12}k_4 + G_{21}k_3)}{(G_{11}k_4 + G_{22}k_3) + i(G_{12}k_4 - G_{21}k_3)} e^{-2ik_1d_1} + \\ + B_P \frac{2k_4}{(G_{11}k_4 + G_{22}k_3) + i(G_{12}k_4 - G_{21}k_3)} e^{-ik_1d_1} e^{-ik_4d_4}. \quad (10.380)$$

КОЭФФИЦИЕНТЫ  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{21}$ ,  $G_{22}$ .

Соотношения прямой передачи для совокупности сред 2 и 3 получаются из последовательного применения соотношений прямой передачи для сред 2 и 3, имеющих вид:

для среды 2

$$U_2^{(2)} = \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} U_1^{(1)} + \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} V_1^{(1)}; \quad (10.381)$$

$$V_2^{(2)} = -\frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} U_1^{(1)} + \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} V_1^{(1)}; \quad (10.382)$$

для среды 3

$$U_3^{(3)} = \frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} U_2^{(2)} + \frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} \frac{k_2}{k_3} V_2^{(2)}; \quad (10.383)$$

$$V_3^{(3)} = -\frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} U_2^{(2)} + \frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} \frac{k_2}{k_3} V_2^{(2)}. \quad (10.384)$$

Подставляя (10.381)–(10.382) в (10.383)–(10.384) и приводя подобные члены, получаем:

$$U_3^{(3)} = \left( \frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} - \frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_2}{k_3} \right) U_1^{(1)} + \\ + \left( \frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} + \frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_3} \right) V_1^{(1)}; \quad (10.385)$$

$$V_3^{(3)} = \left( -\frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_2}{k_3} - \frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \right) U_1^{(1)} + \\ + \left( \frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_3} - \frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} \right) V_1^{(1)}. \quad (10.386)$$

Сравнивая эти выражения с (10.373)–(10.374) находим коэффициенты  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{21}$ ,  $G_{22}$  в явном виде:

$$G_{11} = \frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} - \frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_2}{k_3}; \quad (10.387)$$

$$G_{12} = \frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2} + \frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_3}; \quad (10.388)$$

$$G_{21} = -\frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_2}{k_3} - \frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2}, \quad (10.389)$$

$$G_{22} = \frac{1 - \alpha_3^2}{1 + \alpha_3^2} \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_3} - \frac{2\alpha_3}{1 + \alpha_3^2} \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2}. \quad (10.390)$$

### 10.10.2. Амплитуды выходящих волн. Передача во всех средах

Структура содержит четыре среды. В структуру входят волны с амплитудами  $A_P$  и  $B_P$ , из структуры выходят волны с амплитудами  $A_S$  и  $B_S$ . Задача состоит в том, чтобы выразить амплитуды выходящих волн  $A_S$  и  $B_S$  через амплитуды входящих волн  $A_P$  и  $B_P$ .

Имеются три пары соотношений:

1) соотношения между волновыми функциями и амплитудами волн на левой границе структуры (раздел 10.6.2, формулы (10.167)–(10.168))

$$U_1^{(1)} = H_{11}A_P + H_{12}B_S; \quad (10.391)$$

$$V_1^{(1)} = H_{21}A_P + H_{22}B_S; \quad (10.392)$$

2) результат последовательных подстановок соотношений прямой передачи между сред со 2 по 4 (раздел 10.6.1, формулы (10.157)–(10.158) при  $N = 4$ )

$$U_4^{(4)} = G_{11}^{[4S]}U_1^{(1)} + G_{12}^{[4S]}V_1^{(1)}; \quad (10.393)$$

$$V_4^{(4)} = G_{21}^{[4S]}U_1^{(1)} + G_{22}^{[4S]}V_1^{(1)}; \quad (10.394)$$

3) соотношения между волновыми функциями и амплитудами волн на правой границе структуры (раздел 10.6.3, формулы (10.185)–(10.186))

$$U_4^{(4)} = A_S + B_P; \quad (10.395)$$

$$V_4^{(4)} = -iA_S + iB_P. \quad (10.396)$$

При этом амплитуды волн  $A_S$  и  $B_S$ , выходящих из структуры, определяются через амплитуды волн  $A_P$  и  $B_P$ , входящих в структуру, с помощью соотношений (раздел 10.7.2, формулы (10.240)–(10.241)):

$$A_S = A_P \frac{2(G_{11}^{[4S]}G_{22}^{[4S]} - G_{12}^{[4S]}G_{21}^{[4S]})}{(G_{11}^{[4S]} + G_{22}^{[4S]}) + i(G_{12}^{[4S]} - G_{21}^{[4S]})} H_{11} + \\ + B_P \frac{(G_{11}^{[4S]} - G_{22}^{[4S]}) + i(G_{12}^{[4S]} + G_{21}^{[4S]})}{(G_{11}^{[4S]} + G_{22}^{[4S]}) + i(G_{12}^{[4S]} - G_{21}^{[4S]})}; \quad (10.397)$$

$$B_S = -A_P \frac{(G_{11}^{[4S]} - G_{22}^{[4S]}) - i(G_{12}^{[4S]} + G_{21}^{[4S]})}{(G_{11}^{[4S]} + G_{22}^{[4S]}) + i(G_{12}^{[4S]} - G_{21}^{[4S]})} H_{11} + \\ + B_P \frac{2}{(G_{11}^{[4S]} + G_{22}^{[4S]}) + i(G_{12}^{[4S]} - G_{21}^{[4S]})} \frac{1}{H_{12}}. \quad (10.398)$$

Здесь величины  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{21}$ ,  $H_{22}$  определяются соотношениями (раздел 10.6.2, формулы (10.169)–(10.172)):

$$H_{11} = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.399)$$

$$H_{12} = \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.400)$$

$$H_{21} = -\frac{i(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.401)$$

$$H_{22} = \frac{i(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}, \quad (10.402)$$

а функции  $G_{11}^{[4S]}$ ,  $G_{12}^{[4S]}$ ,  $G_{21}^{[4S]}$ ,  $G_{22}^{[4S]}$  требуют определения с помощью процедуры последовательных подстановок соотношений прямой передачи со среды 2 до среды 4.

Найдем эти функции в явном виде.

Соотношения прямой передачи в средах 2–4 имеют вид:

Среда 2

$$U_2^{(2)} = G_{11}^{[2]}U_1^{(1)} + G_{12}^{[2]}V_1^{(1)}; \quad (10.403)$$

$$V_2^{(2)} = G_{21}^{[2]}U_1^{(1)} + G_{22}^{[2]}V_1^{(1)}. \quad (10.404)$$

Среда 3

$$U_3^{(3)} = G_{11}^{[3]}U_2^{(2)} + G_{12}^{[3]}V_2^{(2)}; \quad (10.405)$$

$$V_3^{(3)} = G_{21}^{[3]}U_2^{(2)} + G_{22}^{[3]}V_2^{(2)}. \quad (10.406)$$

Среда 4

$$U_4^{(4)} = G_{11}^{[4]}U_3^{(3)} + G_{12}^{[4]}V_3^{(3)}; \quad (10.407)$$

$$V_4^{(4)} = G_{21}^{[4]}U_3^{(3)} + G_{22}^{[4]}V_3^{(3)}. \quad (10.408)$$

Выполняя последовательные подстановки и приводя подобные члены, получаем:

$$U_4^{(4)} = \left\{ G_{11}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{11}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{21}^{[2]} + G_{12}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{12}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{21}^{[2]} \right\} U_1^{(1)} + \left\{ G_{11}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{11}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{22}^{[2]} + G_{12}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{12}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{22}^{[2]} \right\} V_1^{(1)}; \quad (10.409)$$

$$V_4^{(4)} = \left\{ G_{21}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{21}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{21}^{[2]} + G_{22}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{22}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{21}^{[2]} \right\} U_1^{(1)} + \left\{ G_{21}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{21}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{22}^{[2]} + G_{22}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{22}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{22}^{[2]} \right\} V_1^{(1)}; \quad (10.410)$$

Сравнивая (10.409)–(10.410) с (10.407)–(10.408), получаем:

$$G_{11}^{[4S]} = G_{11}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{11}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{21}^{[2]} + G_{12}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{12}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{21}^{[2]}, \quad (10.411)$$

\* \* \* \* \*

$$G_{12}^{[4S]} = G_{11}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{11}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{22}^{[2]} + G_{12}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{12}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{22}^{[2]}, \quad (10.412)$$

\* \* \* \* \*

$$G_{21}^{[4S]} = G_{21}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{21}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{21}^{[2]} + G_{22}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{22}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{21}^{[2]}, \quad (10.413)$$

\* \* \* \* \*

$$G_{22}^{[4S]} = G_{21}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{21}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{22}^{[2]} + G_{22}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{22}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{22}^{[2]}. \quad (10.414)$$

Подстановка (10.411)–(10.414) в (10.397)–(10.398) дает искомые амплитуды  $A_S$  и  $B_S$ , выраженные через  $A_P$  и  $B_P$ .

В этих выражениях коэффициенты  $G_{11}^{[n]}$ ,  $G_{12}^{[n]}$ ,  $G_{21}^{[n]}$ ,  $G_{22}^{[n]}$  для сред с  $n = 2, 3, 4$  определяются с помощью соотношений прямой передачи (раздел 10.4.1, формулы (10.97)–(10.100)) и имеют вид:

$$G_{11}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2}, \quad (10.415)$$

$$G_{12}^{[n]} = \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_{n-1}}{k_n}; \quad (10.416)$$

$$G_{21}^{[n]} = -\frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2}; \quad (10.417)$$

$$G_{22}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_{n-1}}{k_n}. \quad (10.418)$$

В выражениях (10.399)–(10.402) и (10.415)–(10.418) функции  $\alpha_n$  определяются условиями сопряжения между границами с номерами  $n - 1$  и  $n$ , в результате чего имеют вид:

при прямом методе (раздел 10.2.1, формула (10.38))

$$\alpha_n = -i \frac{1 - e^{-ik_n d_n}}{1 + e^{-ik_n d_n}}; \quad (10.419)$$

при методе усреднения (раздел 10.2.1, формула (10.57))

$$\alpha_n = \frac{k_n d_n}{2}. \quad (10.420)$$

Непосредственная подстановка (10.399)–(10.402) и (10.415)–(10.418) с учетом (10.419)–(10.420) в (10.397)–(10.398) является вполне очевидной, однако приводит к довольно сложным выражениям, которые ввиду их громоздкости здесь не приводятся.

### 10.11. Пять сред

Из предыдущего раздела видно, что переход от трех сред к четырем, хотя и несколько увеличил число выкладок, но к принципиальным особенностям не привел. То есть решение для четырех сред остается примерно тем же самым, что и для трех сред, только теперь в центре структуры появляется не одна, а две среды, для которых дополнительно выполняется процедура подстановок. Добавим теперь еще одну среду и рассмотрим структуру из пяти сред.

#### 10.11.1. Амплитуды выходящих волн. Передача во всех средах

Структура содержит пять сред. В структуру входят волны с амплитудами  $A_P$  и  $B_P$ , из структуры выходят волны с амплитудами  $A_S$  и  $B_S$ . Задача состоит в том, чтобы выразить амплитуды выходящих волн  $A_S$  и  $B_S$  через амплитуды входящих волн  $A_P$  и  $B_P$ .

Имеются три пары соотношений:

1) соотношения между волновыми функциями и амплитудами волн на левой границе структуры (раздел 10.6.2, формулы (10.167)–(10.168))

$$U_1^{(1)} = H_{11}A_P + H_{12}B_S; \quad (10.421)$$

$$V_1^{(1)} = H_{21}A_P + H_{22}B_S; \quad (10.422)$$

2) результат последовательных подстановок соотношений прямой передачи между сред со 2 по 5 (раздел 10.6.1, формулы (10.157)–(10.158) при  $N = 5$ )

$$U_5^{(5)} = G_{11}^{[5S]}U_1^{(1)} + G_{12}^{[5S]}V_1^{(1)}; \quad (10.423)$$

$$V_5^{(5)} = G_{21}^{[5S]}U_1^{(1)} + G_{22}^{[5S]}V_1^{(1)}; \quad (10.424)$$

3) соотношения между волновыми функциями и амплитудами волн на правой границе структуры (раздел 10.6.3, формулы (10.185)–(10.186))

$$U_5^{(5)} = A_S + B_P; \quad (10.425)$$

$$V_5^{(5)} = -iA_S + iB_P. \quad (10.426)$$

При этом амплитуды волн  $A_S$  и  $B_S$ , выходящих из структуры, определяются через амплитуды волн  $A_P$  и  $B_P$ , входящих в структуру, с помощью соотношений (раздел 10.7.2, формулы (10.240)–(10.241)):

$$A_S = A_P \frac{2(G_{11}^{[5S]}G_{22}^{[5S]} - G_{12}^{[5S]}G_{21}^{[5S]})}{(G_{11}^{[5S]} + G_{22}^{[5S]}) + i(G_{12}^{[5S]} - G_{21}^{[5S]})} H_{11} + \\ + B_P \frac{(G_{11}^{[5S]} - G_{22}^{[5S]}) + i(G_{12}^{[5S]} + G_{21}^{[5S]})}{(G_{11}^{[5S]} + G_{22}^{[5S]}) + i(G_{12}^{[5S]} - G_{21}^{[5S]})}; \quad (10.427)$$

$$B_S = -A_P \frac{(G_{11}^{[5S]} - G_{22}^{[5S]}) - i(G_{12}^{[5S]} + G_{21}^{[5S]}) H_{11}}{(G_{11}^{[5S]} + G_{22}^{[5S]}) + i(G_{12}^{[5S]} - G_{21}^{[5S]}) H_{12}} + B_P \frac{2}{(G_{11}^{[5S]} + G_{22}^{[5S]}) + i(G_{12}^{[5S]} - G_{21}^{[5S]}) H_{12}} \cdot \frac{1}{H_{12}}. \quad (10.428)$$

Здесь величины  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{21}$ ,  $H_{22}$  определяются соотношениями (раздел 10.6.2, формулы (10.169)–(10.172)):

$$H_{11} = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.429)$$

$$H_{12} = \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.430)$$

$$H_{21} = -\frac{i(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.431)$$

$$H_{22} = \frac{i(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}, \quad (10.432)$$

а функции  $G_{11}^{[5S]}$ ,  $G_{12}^{[5S]}$ ,  $G_{21}^{[5S]}$ ,  $G_{22}^{[5S]}$  требуют определения с помощью процедуры последовательных подстановок соотношений прямой передачи от среды 2 до среды 5. Ввиду единообразия процедуры не будем выполнять подстановки последовательно, а приведем лишь получаемые выражения в окончательном виде:

$$G_{11}^{[5S]} = G_{11}^{[5]} G_{11}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{11}^{[5]} G_{11}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{21}^{[2]} + G_{11}^{[5]} G_{12}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{11}^{[5]} G_{12}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{21}^{[2]} + G_{11}^{[5]} G_{21}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{12}^{[5]} G_{21}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{11}^{[5]} G_{22}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{11}^{[5]} G_{22}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{21}^{[2]}; \quad (10.433)$$

\* \* \* \* \*

$$G_{12}^{[5S]} = G_{11}^{[5]} G_{11}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{11}^{[5]} G_{11}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{22}^{[2]} + G_{11}^{[5]} G_{12}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{11}^{[5]} G_{12}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{22}^{[2]} + G_{11}^{[5]} G_{21}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{12}^{[5]} G_{21}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{11}^{[5]} G_{22}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{11}^{[5]} G_{22}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{22}^{[2]}; \quad (10.434)$$

\* \* \* \* \*

$$G_{21}^{[5S]} = G_{21}^{[5]} G_{11}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{11}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{21}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{12}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{12}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{21}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{21}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{22}^{[5]} G_{21}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{22}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{22}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{21}^{[2]}; \quad (10.435)$$

\* \* \* \* \*



$$\begin{aligned}
G_{22}^{[5S]} &= G_{21}^{[5]} G_{11}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{11}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{22}^{[2]} + \\
&+ G_{21}^{[5]} G_{12}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{12}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{22}^{[2]} + \\
&+ G_{21}^{[5]} G_{21}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{22}^{[5]} G_{21}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{22}^{[2]} + \\
&+ G_{21}^{[5]} G_{22}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{22}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{22}^{[2]}.
\end{aligned} \tag{10.436}$$

\* \* \* \* \*

Подстановка этих выражений в (10.427)–(10.428) позволяет найти амплитуды выходящих из структуры волн  $A_S$  и  $B_S$  через амплитуды входящих  $A_P$  и  $B_P$ , которые, ввиду их громоздкости, здесь не приводятся.

Итак, из проведенного рассмотрения можно видеть, что переход от четырех сред к пяти не добавил ничего принципиально нового. Только теперь приходится проводить процедуру подстановок еще один раз в таком же виде, как и для структуры из четырех слоев. Можно полагать, что при дальнейшем увеличении числа слоев принципиальная сторона расчета будет оставаться той же самой, с тем исключением, что внутренние подстановки будут добавляться. При машинной реализации расчета такое повторение можно оформить в виде цикла, в том числе с отдельной подпрограммой.

## 10.12. Полная процедура последовательных подстановок. Условия сопряжения

Рассмотрим полную процедуру последовательных подстановок, начиная с левой границы структуры при  $x = x_0$  и кончая правой границей при  $x = x_N$ . Во всех средах будем пользоваться соотношениями прямой передачи.

Для левой границы будем пользоваться формулами (10.167)–(10.168) из текста раздела 10.6.2, для правой — формулами (10.199)–(10.200) и следующими из них (10.201)–(10.202) из текста раздела 10.6.3.

На первом этапе решения задачи отвлечемся от реального направления распространения волн, а также разделения их на входящие и выходящие и рассмотрим чисто математическую схему процедуры подстановок.

Положим, что на левой границе заданы амплитуды  $A_P$  и  $B_S$ , а на правой требуется получить амплитуды  $A_S$  и  $B_P$ .

Предполагаем сначала, что функциональные коэффициенты при амплитудах, определяемые параметрами сред, известны и записываем соотношения между амплитудами на границах и во всех средах.

Левая граница структуры и среда 1

$$U_1^{(1)} = H_1 A_P + H_2 B_S; \tag{10.437}$$

$$V_1^{(1)} = -iH_1 A_P + iH_2 B_S. \tag{10.438}$$

Среда 2

$$U_2^{(2)} = G_{11}^{[2]}U_1^{(1)} + G_{12}^{[2]}V_1^{(1)}; \quad (10.439)$$

$$V_2^{(2)} = G_{21}^{[2]}U_1^{(1)} + G_{22}^{[2]}V_1^{(1)}. \quad (10.440)$$

Среда 3

$$U_3^{(3)} = G_{11}^{[3]}U_2^{(2)} + G_{12}^{[3]}V_2^{(2)}; \quad (10.441)$$

$$V_3^{(3)} = G_{21}^{[3]}U_2^{(2)} + G_{22}^{[3]}V_2^{(2)}. \quad (10.442)$$

Среда 4

$$U_4^{(4)} = G_{11}^{[4]}U_3^{(3)} + G_{12}^{[4]}V_3^{(3)}; \quad (10.443)$$

$$V_4^{(4)} = G_{21}^{[4]}U_3^{(3)} + G_{22}^{[4]}V_3^{(3)}. \quad (10.444)$$

Среда 5

$$U_5^{(5)} = G_{11}^{[5]}U_4^{(4)} + G_{12}^{[5]}V_4^{(4)}; \quad (10.445)$$

$$V_5^{(5)} = G_{21}^{[5]}U_4^{(4)} + G_{22}^{[5]}V_4^{(4)}. \quad (10.446)$$

.....

Среда  $n$

$$U_n^{(n)} = G_{11}^{[n]}U_{n-1}^{(n-1)} + G_{12}^{[n]}V_{n-1}^{(n-1)}; \quad (10.447)$$

$$V_n^{(n)} = G_{21}^{[n]}U_{n-1}^{(n-1)} + G_{22}^{[n]}V_{n-1}^{(n-1)}. \quad (10.448)$$

.....

Среда  $N$

$$U_N^{(N)} = G_{11}^{[N]}U_{N-1}^{(N-1)} + G_{12}^{[N]}V_{N-1}^{(N-1)}; \quad (10.449)$$

$$V_N^{(N)} = G_{21}^{[N]}U_{N-1}^{(N-1)} + G_{22}^{[N]}V_{N-1}^{(N-1)}. \quad (10.450)$$

Правая граница структуры

$$A_S = \frac{1}{2}(U_N^{(N)} + iV_N^{(N)}); \quad (10.451)$$

$$B_P = \frac{1}{2}(U_N^{(N)} - iV_N^{(N)}). \quad (10.452)$$

Таким образом, при заданных амплитудах  $A_P$  и  $B_S$  из (10.437)–(10.438) можно получить  $U_1^{(1)}$  и  $V_1^{(1)}$ , подстановка которых в формулы (10.439)–(10.440) позволяет найти  $U_2^{(2)}$  и  $V_2^{(2)}$ , затем с помощью (10.441)–(10.442) найти  $U_3^{(3)}$  и  $V_3^{(3)}$ , и так далее последовательно до формул (10.449)–(10.450), откуда находятся  $U_N^{(N)}$  и  $V_N^{(N)}$ , подстановка которых в (10.451)–(10.452) позволяет найти  $A_S$  и  $B_P$ .

При подстановке предыдущих соотношений для  $U_n^{(n)}$  и  $V_n^{(n)}$  в последующие, после приведения соответствующих подобных членов, при

функциях  $U_1^{(1)}$  и  $V_1^{(1)}$  из коэффициентов  $G_{11}^{[n]}$ ,  $G_{12}^{[n]}$ ,  $G_{21}^{[n]}$ ,  $G_{22}^{[n]}$  образуются сложные комбинации. Получающиеся в результате соотношения для сред со 2 по  $N$  (подобно формулам (10.101)–(10.102) в тексте раздела 10.4.1) можно записать в виде:

$$U_N^{(N)} = G_{11}^{[NS]}U_1^{(1)} + G_{12}^{[NS]}V_1^{(1)}; \quad (10.453)$$

$$U_N^{(N)} = G_{21}^{[NS]}U_1^{(1)} + G_{22}^{[NS]}V_1^{(1)}, \quad (10.454)$$

где упомянутые комбинации обозначены через  $G_{11}^{[NS]}$ ,  $G_{12}^{[NS]}$ ,  $G_{21}^{[NS]}$ ,  $G_{22}^{[NS]}$ .

Будем называть совокупность выражений (10.453)–(10.454) «условиями сопряжения волновых функций для структуры в целом».

Можно видеть, что упомянутые последовательные подстановки на каждом шаге сохраняют линейную зависимость последующих величин от предыдущих. При этом и зависимости амплитуд  $A_S$  и  $B_P$  от  $A_P$  и  $B_S$  также сохраняют линейность, то есть будут выполняться соотношения:

$$A_S = K_{11}A_P + K_{12}B_S; \quad (10.455)$$

$$B_P = K_{21}A_P + K_{22}B_S, \quad (10.456)$$

где  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{21}$ ,  $K_{22}$  — функции параметров сред, определяемые в процессе подстановок.

Будем называть совокупность выражений (10.455)–(10.456) «условиями сопряжения амплитуд для структуры в целом».

Поскольку в структуру входят волны  $A_P$  и  $B_P$ , а выходят  $A_S$  и  $B_S$ , то конечной задачей является нахождение амплитуд  $A_S$  и  $B_S$  через  $A_P$  и  $B_P$ . Амплитуду  $B_S$  можно сразу найти из (10.456), после чего подстановка полученного значения в (10.455) позволяет найти и  $A_S$ . В результате получаем:

$$A_S = \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}{K_{22}}A_P + \frac{K_{12}}{K_{22}}B_P; \quad (10.457)$$

$$B_S = -\frac{K_{21}}{K_{22}}A_P + \frac{1}{K_{22}}B_P. \quad (10.458)$$

Подставляя (10.437)–(10.438) в (10.453)–(10.454), и далее полученные выражения — в (10.451)–(10.452), после чего, сравнивая с (10.455)–(10.456), находим:

$$K_{11} = \frac{1}{2}[(G_{11}^{[NS]} + G_{22}^{[NS]}) - i(G_{12}^{[NS]} - G_{21}^{[NS]})]H_1; \quad (10.459)$$

$$K_{12} = \frac{1}{2}[(G_{11}^{[NS]} - G_{22}^{[NS]}) + i(G_{12}^{[NS]} + G_{21}^{[NS]})]H_2; \quad (10.460)$$

$$K_{21} = \frac{1}{2}[(G_{11}^{[NS]} - G_{22}^{[NS]}) - i(G_{12}^{[NS]} + G_{21}^{[NS]})]H_1; \quad (10.461)$$

$$K_{22} = \frac{1}{2}[(G_{11}^{[NS]} + G_{22}^{[NS]}) + i(G_{12}^{[NS]} - G_{21}^{[NS]})]H_2. \quad (10.462)$$

Таким образом, задача получения амплитуд выходящих волн  $A_S$  и  $B_S$  через амплитуды входящих  $A_P$  и  $B_P$  в общем виде, при условии известности функциональных коэффициентов  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $G_{11}^{[n]}$ ,  $G_{12}^{[n]}$ ,  $G_{21}^{[n]}$ ,  $G_{22}^{[n]}$ , решена.

Рассмотрим теперь явный вид функциональных коэффициентов.

Коэффициенты  $H_1$ ,  $H_2$  определяются из соотношений прямой передачи для первой среды и в соответствии с формулами (10.169)–(10.172) текста раздела 10.6.2 имеют вид:

$$H_1 = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.463)$$

$$H_2 = \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}. \quad (10.464)$$

Коэффициенты  $G_{11}^{[n]}$ ,  $G_{12}^{[n]}$ ,  $G_{21}^{[n]}$ ,  $G_{22}^{[n]}$  для среды  $n$  определяются с помощью соотношений прямой передачи (раздел 10.4.1, формулы (10.97)–(10.100)) и имеют вид:

$$G_{11}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2}; \quad (10.465)$$

$$G_{12}^{[n]} = \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_{n-1}}{k_n}; \quad (10.466)$$

$$G_{21}^{[n]} = -\frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2}; \quad (10.467)$$

$$G_{22}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_{n-1}}{k_n}. \quad (10.468)$$

В этих выражениях для среды с номером  $n = 1, 2, \dots, N$  функции  $\alpha_n$  определяются условиями сопряжения между границами с номерами  $n - 1$  и  $n$ , то есть имеют вид:

при прямом методе (раздел 10.2.1, формула (10.38))

$$\alpha_n = -i \frac{1 - e^{-ik_n d_n}}{1 + e^{-ik_n d_n}}; \quad (10.469)$$

при методе усреднения (раздел 10.2.1, формула (10.57))

$$\alpha_n = \frac{k_n d_n}{2}. \quad (10.470)$$

В качестве обобщения приведем здесь еще раз явный вид входящих в (10.453)–(10.454) комбинаций из коэффициентов  $G_{11}^{[n]}$ ,  $G_{12}^{[n]}$ ,  $G_{21}^{[n]}$ ,  $G_{22}^{[n]}$  для значений  $N$  от двух до пяти:

Для двух сред ( $N = 2$ )

$$G_{11}^{[2S]} = G_{11}^{[2]}, \quad (10.471)$$

$$G_{12}^{[2S]} = G_{12}^{[2]}, \quad (10.472)$$

$$G_{21}^{[2S]} = G_{21}^{[2]}; \tag{10.473}$$

$$G_{22}^{[2S]} = G_{22}^{[2]}. \tag{10.474}$$

\* \* \* \* \*

Для трех сред ( $N = 3$ )

$$G_{11}^{[3S]} = G_{11}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{12}^{[3]}G_{21}^{[2]}, \tag{10.475}$$

$$G_{12}^{[3S]} = G_{11}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{12}^{[3]}G_{22}^{[2]}, \tag{10.476}$$

$$G_{21}^{[3S]} = G_{21}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{22}^{[3]}G_{21}^{[2]}, \tag{10.477}$$

$$G_{22}^{[3S]} = G_{21}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{22}^{[3]}G_{22}^{[2]}. \tag{10.478}$$

\* \* \* \* \*

Для четырех сред ( $N = 4$ )

$$G_{11}^{[4S]} = G_{11}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{11}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{21}^{[2]} + G_{12}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{12}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{21}^{[2]}, \tag{10.479}$$

$$G_{12}^{[4S]} = G_{11}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{11}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{22}^{[2]} + G_{12}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{12}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{22}^{[2]}, \tag{10.480}$$

$$G_{21}^{[4S]} = G_{21}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{21}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{21}^{[2]} + G_{22}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{22}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{21}^{[2]}, \tag{10.481}$$

$$G_{22}^{[4S]} = G_{21}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{21}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{22}^{[2]} + G_{22}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{22}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{22}^{[2]}. \tag{10.482}$$

\* \* \* \* \*

Для пяти сред ( $N = 5$ )

$$G_{11}^{[5S]} = G_{11}^{[5]}G_{11}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{11}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{21}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{12}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{12}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{21}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{21}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{21}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{21}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{22}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{22}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{21}^{[2]}, \tag{10.483}$$

$$G_{12}^{[5S]} = G_{11}^{[5]}G_{11}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{11}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{22}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{12}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{12}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{22}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{21}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{21}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{22}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{22}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{12}^{[2]} + G_{11}^{[5]}G_{22}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{22}^{[2]}, \tag{10.484}$$

$$G_{21}^{[5S]} = G_{21}^{[5]}G_{11}^{[4]}G_{11}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{21}^{[5]}G_{11}^{[4]}G_{12}^{[3]}G_{21}^{[2]} + G_{21}^{[5]}G_{12}^{[4]}G_{21}^{[3]}G_{11}^{[2]} + G_{21}^{[5]}G_{12}^{[4]}G_{22}^{[3]}G_{21}^{[2]}$$

$$\begin{aligned}
 & + G_{21}^{[5]} G_{21}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{22}^{[5]} G_{21}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{21}^{[2]} + \\
 & + G_{21}^{[5]} G_{22}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{11}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{22}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{21}^{[2]}; \quad (10.485)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{22}^{[5S]} = & G_{21}^{[5]} G_{11}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{11}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{22}^{[2]} + \\
 & + G_{21}^{[5]} G_{12}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{12}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{22}^{[2]} + \\
 & + G_{21}^{[5]} G_{21}^{[4]} G_{11}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{22}^{[5]} G_{21}^{[4]} G_{12}^{[3]} G_{22}^{[2]} + \\
 & + G_{21}^{[5]} G_{22}^{[4]} G_{21}^{[3]} G_{12}^{[2]} + G_{21}^{[5]} G_{22}^{[4]} G_{22}^{[3]} G_{22}^{[2]}. \quad (10.486)
 \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*

Из структуры полученных выражений (10.471)–(10.486) можно видеть, что последующие комбинации, начиная с  $n = 3$ , можно получить из предыдущих с помощью следующих рекуррентных формул:

$$G_{11}^{[nS]} = G_{11}^{[n]} G_{11}^{[n-1S]} + G_{12}^{[n]} G_{21}^{[n-1S]}, \quad (10.487)$$

$$G_{12}^{[nS]} = G_{11}^{[n]} G_{12}^{[n-1S]} + G_{12}^{[n]} G_{22}^{[n-1S]}, \quad (10.488)$$

$$G_{21}^{[nS]} = G_{21}^{[n]} G_{11}^{[n-1S]} + G_{22}^{[n]} G_{21}^{[n-1S]}, \quad (10.489)$$

$$G_{22}^{[nS]} = G_{21}^{[n]} G_{12}^{[n-1S]} + G_{22}^{[n]} G_{22}^{[n-1S]}. \quad (10.490)$$

Получаемые в результате функции  $G_{11}^{[NS]}$ ,  $G_{12}^{[NS]}$ ,  $G_{21}^{[NS]}$ ,  $G_{22}^{[NS]}$  при подстановке в (10.453)–(10.454) позволяют определить  $U_N^{(N)}$  и  $V_N^{(N)}$ , из которых с помощью (10.451)–(10.452) получаются амплитуды  $A_S$  и  $B_P$ , выраженные через  $U_1^{(1)}$  и  $V_1^{(1)}$ . Подстановка в полученные выражения (10.437)–(10.438), дает в результате выражения амплитуд  $A_S$  и  $B_P$  через  $A_P$  и  $B_S$ , сравнение которых с (10.455)–(10.456) позволяет определить функции параметров сред  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{21}$ ,  $K_{22}$ . Подстановка этих функций в (10.457)–(10.458) дает выражения амплитуд выходящих из структуры волн  $A_S$  и  $B_S$  через амплитуды входящих  $A_P$  и  $B_P$ , что и является решением исходной задачи.

### 10.13. Произвольное число сред. амплитуды выходящих волн в общем виде при передаче во всех средах

Приведем в общем виде полную схему получения амплитуд выходящих волн через амплитуды входящих для произвольного числа сред  $N$  при учете передачи во всех средах.

В общем случае  $N$  сред имеются три пары соотношений:

1) условия связи амплитуд с волновыми функциями на левой границе

$$U_1^{(1)} = H_1 A_P + H_2 B_S; \quad (10.491)$$

$$V_1^{(1)} = -iH_1 A_P + iH_2 B_S; \quad (10.492)$$

2) условия сопряжения волновых функций для структуры в целом

$$U_N^{(N)} = G_{11}^{[NS]}U_1^{(1)} + G_{12}^{[NS]}V_1^{(1)}; \quad (10.493)$$

$$V_N^{(N)} = G_{21}^{[NS]}U_1^{(1)} + G_{22}^{[NS]}V_1^{(1)}; \quad (10.494)$$

3) условия связи амплитуд с волновыми функциями на правой границе

$$A_S = \frac{1}{2}(U_N^{(N)} + iV_N^{(N)}); \quad (10.495)$$

$$B_P = \frac{1}{2}(U_N^{(N)} - iV_N^{(N)}). \quad (10.496)$$

Эти три пары соотношений позволяют найти условия сопряжения амплитуд для структуры в целом:

$$A_S = K_{11}A_P + K_{12}B_S; \quad (10.497)$$

$$B_P = K_{21}A_P + K_{22}B_S, \quad (10.498)$$

где

$$K_{11} = \frac{1}{2} \left[ (G_{11}^{[NS]} + G_{22}^{[NS]}) - i(G_{12}^{[NS]} - G_{21}^{[NS]}) \right] H_1; \quad (10.499)$$

$$K_{12} = \frac{1}{2} \left[ (G_{11}^{[NS]} - G_{22}^{[NS]}) + i(G_{12}^{[NS]} + G_{21}^{[NS]}) \right] H_2; \quad (10.500)$$

$$K_{21} = \frac{1}{2} \left[ (G_{11}^{[NS]} - G_{22}^{[NS]}) - i(G_{12}^{[NS]} + G_{21}^{[NS]}) \right] H_1; \quad (10.501)$$

$$K_{22} = \frac{1}{2} \left[ (G_{11}^{[NS]} + G_{22}^{[NS]}) + i(G_{12}^{[NS]} - G_{21}^{[NS]}) \right] H_2. \quad (10.502)$$

Из этих условий получаются амплитуды выходящих из структуры волн  $A_S$  и  $B_S$ , выраженные через амплитуды волн входящих в структуру  $A_P$  и  $B_P$ :

$$A_S = \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}{K_{22}}A_P + \frac{K_{12}}{K_{22}}B_P; \quad (10.503)$$

$$B_S = -\frac{K_{21}}{K_{22}}A_P + \frac{1}{K_{22}}B_P. \quad (10.504)$$

Входящие в (10.493)–(10.494) и (10.499)–(10.502) функции  $G_{11}^{[NS]}$ ,  $G_{12}^{[NS]}$ ,  $G_{21}^{[NS]}$ ,  $G_{22}^{[NS]}$  получаются последовательным вычислением с помощью рекуррентных формул:

$$G_{11}^{[nS]} = G_{11}^{[n]}G_{11}^{[n-1S]} + G_{12}^{[n]}G_{21}^{[n-1S]}, \quad (10.505)$$

$$G_{12}^{[nS]} = G_{11}^{[n]}G_{12}^{[n-1S]} + G_{12}^{[n]}G_{22}^{[n-1S]}, \quad (10.506)$$

$$G_{21}^{[nS]} = G_{21}^{[n]}G_{11}^{[n-1S]} + G_{22}^{[n]}G_{21}^{[n-1S]}, \quad (10.507)$$

$$G_{22}^{[nS]} = G_{21}^{[n]}G_{12}^{[n-1S]} + G_{22}^{[n]}G_{22}^{[n-1S]}, \quad (10.508)$$

где  $n$  меняется от 2 до  $N$ , а соответствующие функции  $G_{ik}^{[n]}$  ( $i, k = 1, 2$ ) равны:

$$G_{11}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2}; \quad (10.509)$$

$$G_{12}^{[n]} = \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_{n-1}}{k_n}; \quad (10.510)$$

$$G_{21}^{[n]} = -\frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2}; \quad (10.511)$$

$$G_{22}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_{n-1}}{k_n}. \quad (10.512)$$

Входящие в (10.492)–(10.493) и (10.499)–(10.502) функции  $H_1$  и  $H_2$  имеют вид:

$$H_1 = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.513)$$

$$H_2 = \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}. \quad (10.514)$$

В выражениях (10.509)–(10.514) для среды с номером  $n = 1, 2, \dots, N$  функции  $\alpha_n$  имеют вид:

при прямом методе

$$\alpha_n = -i \frac{1 - e^{-ik_n d_n}}{1 + e^{-ik_n d_n}}; \quad (10.515)$$

при методе усреднения

$$\alpha_n = \frac{k_n d_n}{2}. \quad (10.516)$$

Подставляя (10.499)–(10.502) в (10.503)–(10.504) и опуская для упрощения записи верхний индекс « $NS$ », можно записать амплитуды выходящих волн в более развернутом виде:

$$A_S = A_P \frac{2(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})[(G_{11} + G_{22}) - i(G_{12} + G_{21})]}{(G_{11} + G_{22})^2 + (G_{12} - G_{21})^2} H_1 + \\ + B_P \frac{(G_{11}^2 + G_{12}^2 - G_{21}^2 - G_{22}^2) + i2(G_{11}G_{21} + G_{12}G_{22})}{(G_{11} + G_{22})^2 + (G_{12} - G_{21})^2}; \quad (10.517)$$

$$B_S = A_P \frac{(-G_{11}^2 + G_{12}^2 - G_{21}^2 + G_{22}^2) + i2(G_{11}G_{12} + G_{21}G_{22})}{(G_{11} + G_{22})^2 + (G_{12} - G_{21})^2} \frac{H_1}{H_2} + \\ + B_P \frac{(G_{11} + G_{22}) - i(G_{12} - G_{21})}{(G_{11} + G_{22})^2 + (G_{12} - G_{21})^2} \frac{2}{H_2}. \quad (10.518)$$



### 10.14. Схема численной реализации метода исключения

Рассмотрим схему численного расчета для структуры, состоящей из произвольного числа сред  $N$ . Пусть заданы координаты границ между средами  $x_0, x_1, \dots, x_N$ , а также волновые числа во всех средах  $k_1, k_2, \dots, k_N$ . Предположим, что в структуру входят волны с амплитудами  $A_P$  и  $B_P$ . Будем искать амплитуды волн, выходящих из структуры  $A_S$  и  $B_S$ , которые в общем случае могут быть комплексными, то есть содержать фазу выходящих колебаний относительно входящих. Приведем возможную схему машинного алгоритма.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ШАГОВ РАСЧЕТА С ФОРМУЛАМИ (схема машинного алгоритма).

#### Шаг № 1.

Задание амплитуд входящих волн  $A_P, B_P$ .

#### Шаг № 2.

Задание координат  $x_0, x_1, \dots, x_N$ .

#### Шаг № 3.

Задание волновых чисел  $k_1, k_2, \dots, k_N$ .

#### Шаг № 4

Вычисление толщин сред  $d_1, d_2, \dots, d_N$  в цикле от 1 до  $N$ :

$$d_n = x_n - x_{n-1}. \quad (10.519)$$

#### Шаг № 5

Вычисление параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  в цикле от 1 до  $N$ :

прямой метод

$$\alpha_n = -i \frac{1 - e^{-ik_n d_n}}{1 + e^{-ik_n d_n}}, \quad (10.520)$$

метод усреднения

$$\alpha_n = \frac{k_n d_n}{2}. \quad (10.521)$$

#### Шаг № 6

Вычисление  $H_1, H_2$ :

$$H_1 = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (10.522)$$

$$H_2 = \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}. \quad (10.523)$$

#### Шаг № 7

Вычисление  $G_{11}^{[2S]}, G_{12}^{[2S]}, G_{21}^{[2S]}, G_{22}^{[2S]}$ :

$$G_{11}^{[2S]} = \frac{1 - \alpha_2^2}{1 + \alpha_2^2}; \quad (10.524)$$

$$G_{12}^{[2S]} = \frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2} \frac{k_1}{k_2}; \quad (10.525)$$

$$G_{21}^{[2S]} = -\frac{2\alpha_2}{1 + \alpha_2^2}; \quad (10.526)$$

$$G_{22}^{[2S]} = \frac{1 - \alpha_2^2 k_1}{1 + \alpha_2^2 k_2}. \quad (10.527)$$

**Шаг № 8.**

Вычисление  $G_{11}^{[NS]}$ ,  $G_{12}^{[NS]}$ ,  $G_{21}^{[NS]}$ ,  $G_{22}^{[NS]}$  с помощью рекуррентных формул в цикле от  $3$  до  $N$  с помощью подпрограммы № 1:

$$G_{11}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2}; \quad (10.528)$$

$$G_{12}^{[n]} = \frac{2\alpha_n k_{n-1}}{1 + \alpha_n^2 k_n}; \quad (10.529)$$

$$G_{21}^{[n]} = -\frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2}; \quad (10.530)$$

$$G_{22}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2 k_{n-1}}{1 + \alpha_n^2 k_n}. \quad (10.531)$$

$$G_{11}^{[nS]} = G_{11}^{[n]} G_{11}^{[n-1S]} + G_{12}^{[n]} G_{21}^{[n-1S]}, \quad (10.532)$$

$$G_{12}^{[nS]} = G_{11}^{[n]} G_{12}^{[n-1S]} + G_{12}^{[n]} G_{22}^{[n-1S]}, \quad (10.533)$$

$$G_{21}^{[nS]} = G_{21}^{[n]} G_{11}^{[n-1S]} + G_{22}^{[n]} G_{21}^{[n-1S]}, \quad (10.534)$$

$$G_{22}^{[nS]} = G_{21}^{[n]} G_{12}^{[n-1S]} + G_{22}^{[n]} G_{22}^{[n-1S]}. \quad (10.535)$$

**Шаг № 9**

Вычисление  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{21}$ ,  $K_{22}$ :

$$K_{11} = \frac{1}{2}[(G_{11}^{[NS]} + G_{22}^{[NS]}) - i(G_{12}^{[NS]} - G_{21}^{[NS]})]H_1; \quad (10.536)$$

$$K_{12} = \frac{1}{2}[(G_{11}^{[NS]} - G_{22}^{[NS]}) + i(G_{12}^{[NS]} + G_{21}^{[NS]})]H_2; \quad (10.537)$$

$$K_{21} = \frac{1}{2}[(G_{11}^{[NS]} - G_{22}^{[NS]}) - i(G_{12}^{[NS]} + G_{21}^{[NS]})]H_1; \quad (10.538)$$

$$K_{22} = \frac{1}{2}[(G_{11}^{[NS]} + G_{22}^{[NS]}) + i(G_{12}^{[NS]} - G_{21}^{[NS]})]H_2. \quad (10.539)$$

**Шаг № 10**

Вычисление амплитуд выходящих волн  $A_S$ ,  $B_S$ :

$$A_S = \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}{K_{22}}A_P + \frac{K_{12}}{K_{22}}B_P; \quad (10.540)$$

$$B_S = -\frac{K_{21}}{K_{22}}A_P + \frac{1}{K_{22}}B_P. \quad (10.541)$$

**Шаг № 11**

Вывод полученных результатов  $A_S$ ,  $B_S$ .

### 10.15. Возможные варианты передачи для структуры, состоящей из произвольного числа сред

В разделе 10.4 мы определили суть метода исключения как разбиения всей структуры на ячейки, каждая из которых содержит какую-то среду с прилегающей к ней границей, с последующим сшиванием ячеек от начала структуры к ее концу. Был предложен один из способов сшивания в положительном направлении оси  $Ox$ , осуществляемый переходом от ячейки к ячейке — прямой передачей. Однако, как отмечено в разделе 10.4.2 (замечание), только этим способом не ограничиваются возможности сшивании ячеек. Там же упомянуты все возможные варианты передачи: прямая и обратная, каждая в двух видах с включением той или иной границы. Для обобщения сказанного здесь еще раз кратко обсудим эти варианты.

Если к одному участку среды с противоположных сторон примыкают две границы, то участок среды с предшествующей ему границей называется *ячейкой первого рода*, а участок среды со следующей за ним границей называется *ячейкой второго рода*.

*Прямая передача первого рода* используется, когда ячейка включает в себя участок среды, заключенный между границами при  $x_{n-1}$  и  $x_n$ , а также предшествующую этому участку границу при  $x_{n-1}$  (рис. 10.3), то есть в ячейку «входят» функции  $U_{n-1}^{(n-1)}$ ,  $V_{n-1}^{(n-1)}$  и «выходят» функции  $U_n^{(n)}$ ,  $V_n^{(n)}$ .

*Прямая передача второго рода* применяется, когда ячейка включает в себя тот же участок среды и следующую за этим участком границу при  $x_n$  (рис. 10.4), то есть в ячейку «входят» функции  $U_n^{(n-1)}$ ,  $V_n^{(n-1)}$ , а из ячейки «выходят» функции  $U_{n+1}^{(n)}$ ,  $V_{n+1}^{(n)}$ .

*Обратная передача первого рода* используется когда ячейка включает в себя участок среды, заключенный между границами при  $x_{n-1}$  и  $x_n$ , а также предшествующую этому участку границу при  $x_{n-1}$ , однако теперь, в отличие от прямой передачи, ячейка проходится в отрицательном направлении оси  $Ox$ , так что в ячейку «входят» функции  $U_n^{(n)}$ ,  $V_n^{(n)}$  и «выходят» функции  $U_{n-1}^{(n-1)}$ ,  $V_{n-1}^{(n-1)}$ .

*Обратная передача второго рода* используется, когда ячейка включает в себя тот же участок среды, заключенный между границами при  $x_{n-1}$  и  $x_n$  и следующую за этим участком границу при  $x_n$ , однако теперь, в отличие от прямой передачи, ячейка проходится в отрицательном направлении оси  $Ox$ , так что в ячейку «входят» функции  $U_n^{(n+1)}$ ,  $V_n^{(n+1)}$  и «выходят» функции  $U_{n-1}^{(n-1)}$ ,  $V_{n-1}^{(n-1)}$ .

Таким образом, разбиение структуры на ячейки при прямой передаче, то есть в положительном направлении оси  $Ox$ , допускает два варианта — первого и второго рода, различающиеся включением в ячейку предшествующей или последующей границы.

При обратной передаче, то есть в отрицательном направлении оси  $Ox$ , также возможны два варианта — первого и второго рода,

по-прежнему различающиеся включением в ячейку предшествующей или последующей границы.

Итак, метод исключения по ячейкам допускает четыре возможных варианта.

Дополнительно следует отметить, что на внешних поверхностях структуры при  $x_0$  и  $x_N$  волны входят в структуру и выходят из нее, поэтому ячейки в первой и последней средах не могут быть замкнутыми. Действительно, в первую среду в контур ячейки входит внешняя поверхность структуры, по другую сторону от которой сред и распространяющихся по ним волн уже нет. В последней же среде ячейка с номером  $N$  примыкает к другой внешней поверхности структуры, где распространяющихся волн тоже нет. Поэтому шивание ячеек может быть произведено только в пределах сред от 2 до  $x_0$ , а первую и последнюю среды ( $x_N$  и  $L = x_N - x_0$ ) необходимо рассматривать отдельно. Возможные случаи для начала структуры (среды  $k = k_1 + \frac{k_N - k_1}{x_N} \cdot x$  и  $k_1$ ), а также для ее конца (среды  $k_N$  и  $x_0$ ) рассмотрены в разделе 10.6.

Таким образом, методом исключения по ячейкам можно получить соотношения для прямой и обратной передач первого и второго рода для структуры, состоящей из произвольного числа сред. Эти соотношения получаются путем последовательных подстановок. Разбиение структуры на ячейки допускает четыре возможных варианта решения, все из которых должны приводить к одному и тому же результату. При этом отдельно следует рассматривать распространение волн как вблизи начала структуры, так и вблизи ее конца. Тожественность результатов, получаемых различными вариантами, авторы рекомендуют проверить любознательному читателю в качестве полезного упражнения.

## 10.16. Обобщение на случай электромагнитных волн

Проведенное рассмотрение выполнено на основе одномерной волны, однако оно может быть обобщено на случай волн другой природы, в частности электромагнитных, например так, как это сделано в работах [1, стр. 153–154], [74], [56, стр. 77–79], [57, стр. 87–90]. Приведем краткую схему обобщения, опираясь на данные упомянутых работ.

Для случая нормального падения электромагнитной волны достаточно во всех полученных в рамках данной главы выражениях, содержащих волновое число  $k_n$ , кроме показателей экспонент, произвести замену этого волнового числа на обратный импеданс  $Z_n$  той же среды:

$$k_n \rightarrow 1/Z_n, \quad (10.542)$$

где

$$Z_n = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_n}{\varepsilon_0 \varepsilon_n}}, \quad (10.543)$$

$\mu_n$  и  $\varepsilon_n$  — магнитная и диэлектрическая проницаемости  $n$ -го слоя,  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  — магнитная и электрическая постоянные в системе СИ.

Для наклонного падения волны с продольной (вертикальной) поляризацией надо произвести замену:

$$k_n \rightarrow 1/Z_n \cos \theta_n, \quad (10.544)$$

в случае поперечной (горизонтальной) поляризации замену:

$$k_n \rightarrow \cos \theta_n / Z_n, \quad (10.545)$$

а также заменить экспоненту:

$$\exp(ik_n x) \rightarrow \exp(ik_n x \cos \theta_n), \quad (10.546)$$

где  $\theta_n$  — угол распространения (преломления) волны в  $n$ -м слое, определяемый законом Снеллиуса [1, стр. 232, форм. (241)], [57, стр. 71, форм. (4.46)], [3, стр. 62–63, форм. (8)]:

$$\cos \theta_n = \frac{\sqrt{k_n^2 - k_{n-1}^2 \sin^2 \theta_{n-1}}}{k_n}. \quad (10.547)$$

При этом все остальные выражения, содержащие углы  $\theta_n$ , остаются без изменений.

В случае нормального падения вид волновых функций (10.10)–(10.11) не меняется, а уравнения (10.14)–(10.15) заменяются следующими:

$$\frac{dU_n}{dx} - \frac{1}{Z_n} V_n = 0; \quad (10.548)$$

$$\frac{dV_n}{dx} + \frac{1}{Z_n} U_n = 0. \quad (10.549)$$

Выражение (10.38) для  $\alpha_n$ , соответствующее прямому методу, не меняется, а аналогичное выражение (10.57) для метода усреднения принимает вид:

$$\alpha_n = \frac{d_n}{2Z_n}. \quad (10.550)$$

Условия сопряжения, выражаемые через  $\alpha_n$ , не меняются, граничные условия (10.7) остаются прежними, а (10.9) принимают вид:

$$\frac{1}{Z_n} V_n^{(n)} = \frac{1}{Z_{n+1}} V_{n+1}^{(n)}. \quad (10.551)$$

Соотношения прямой передачи (10.95)–(10.96) принимают вид:

$$U_n^{(n)} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} U_{n-1}^{(n-1)} + \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} \frac{Z_n}{Z_{n-1}} V_{n-1}^{(n-1)}; \quad (10.552)$$

$$V_n^{(n)} = -\frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} U_{n-1}^{(n-1)} + \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} \frac{Z_n}{Z_{n-1}} V_{n-1}^{(n-1)}. \quad (10.553)$$

Функции (10.97) и (10.99) остаются прежними, а (10.98) и (10.100) принимают вид:

$$G_{12}^{[n]} = \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} \frac{Z_n}{Z_{n-1}}; \quad (10.554)$$

$$G_{22}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} \frac{Z_n}{Z_{n-1}}. \quad (10.555)$$

Аналогичные изменения претерпевают остальные функции.

В случае наклонного падения волновые функции (10.10)–(10.11) принимают вид:

$$U_n = A_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})\cos\theta_n} + B_n e^{ik_n(x-x_n)\cos\theta_n}; \quad (10.556)$$

$$V_n = -iA_n e^{-ik_n(x-x_{n-1})\cos\theta_n} + iB_n e^{ik_n(x-x_n)\cos\theta_n}. \quad (10.557)$$

Параметры  $\alpha_n$  для прямого метода принимают вид:

$$\alpha_n = -i \frac{1 - e^{-ik_n d_n \cos\theta_n}}{1 + e^{-ik_n d_n \cos\theta_n}}; \quad (10.558)$$

для метода усреднения при продольной поляризации

$$\alpha_n = \frac{d_n}{2Z_n \cos\theta_n}; \quad (10.559)$$

при поперечной поляризации

$$\alpha_n = \frac{d_n \cos\theta_n}{2Z_n}. \quad (10.560)$$

Граничное условие (10.9) для продольной поляризации принимает вид:

$$\frac{1}{Z_n \cos\theta_n} V_n^{(n)} = \frac{1}{Z_{n+1} \cos\theta_{n+1}} V_{n+1}^{(n)} \quad (10.561)$$

и, соответственно, для поперечной поляризации принимает вид:

$$\frac{\cos\theta_n}{Z_n} V_n^{(n)} = \frac{\cos\theta_{n+1}}{Z_{n+1}} V_{n+1}^{(n)}. \quad (10.562)$$

Аналогичные изменения претерпевают остальные формулы.

Такова краткая схема, позволяющая математический аппарат метода исключения обобщить на случай электромагнитных волн. Более подробный разбор такого обобщения авторы рекомендуют рассмотреть любознательному читателю в качестве полезного упражнения.

## Выводы по главе 10

Данная глава посвящена описанию математического аппарата метода исключения, предназначенного для расчета распространения волн в многослойных структурах. Рассмотрение выполнено на основе одномерных волн прямого и встречного направлений. Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. В рамках геометрии задачи, представляющей собой состоящую из плоскопараллельных слоев многослойную структуру, введены в рассмотрение принадлежащие каждому слою в отдельности волновые

функции первого и второго рода. Функция первого рода представляет собой сумму двух волн прямого и встречного направлений, являющихся парой решений одного и того же волнового уравнения для соответствующего слоя, нормированных относительно точки исхода той и другой волн. Функция второго рода представляет собой частное от деления производной от функции первого рода на единое для обеих волн волновое число.

2. Для границы между каждыми двумя слоями структуры получены по два граничных условия, первое из которых требует равенства волновых функций первого рода по обе стороны от границы, а второе требует равенства произведений волновых функций второго рода на волновое число по соответствующую сторону от границы.

3. Вся структура разбивается на ячейки, каждая из которых включает в себя одну среду и одну границу. На основе граничных условий получены условия сопряжения, определяющие соотношения между функциями первого и второго рода на обеих сторонах каждой ячейки. Условия сопряжения получены на основе методов прямого и усреднения, причем соотношение между волновыми функциями определяется с помощью параметра сопряжения, имеющего специфический вид для того и другого метода.

4. Параметры волн, распространяющихся в структуре в целом получаются сшиванием ячеек друг с другом на основе прямого «прикладывания» амплитуд волн по разные стороны каждой ячейки, в результате чего амплитуды внутренних волн между ячейками взаимно исключаются. Решение получаемой в результате системы из двух линейных уравнений позволяет найти амплитуды выходящих из структуры волн через амплитуды волн, в структуру входящих.

5. Отмечено, что сшивание ячеек друг с другом можно проводить в виде прямой передачи, то есть от начала структуры к ее концу, а также в виде обратной передачи — от конца структуры к ее началу. Отмечены два варианта формирования ячеек — ячейка первого рода, включающая в себя участок среды с границей, примыкающей к нему со стороны меньших значений координаты, и ячейка второго рода, включающая в себя участок среды с границей, примыкающей к нему со стороны больших значений координаты. Таким образом, возможны четыре вида формирования структуры: вся структура может состоять из ячеек первого рода, проходимых прямой передачей (прямая передача первого рода), из ячеек второго рода, проходимых также прямой передачей (прямая передача второго рода), из ячеек первого рода, проходимых обратной передачей (обратная передача первого рода) и из ячеек второго рода, проходимых обратной передачей (обратная передача второго рода). Отмечено, что все виды передачи являются эквивалентными в том отношении, что приводят к одинаковому результату.

6. Для случая прямой передачи первого рода приведена схема последовательных подстановок для всех внутренних ячеек структуры кроме первой и последней, для которых получены отдельные выра-

жения передачи, отражающие отсутствие принадлежащих к структуре сред вне первого и последнего слоев структуры. На основе сшивания всех ячеек структуры, то есть при учете передачи во всех средах, получены амплитуды выходящих из структуры волн через амплитуды волн, входящих в структуру.

7. Процедура последовательных подстановок обобщена на случай структуры с произвольным числом сред. Получены условия сопряжения волновых функций и амплитуд для структуры в целом. В качестве конкретных примеров рассмотрены случаи структур, содержащих от двух до пяти сред. Показано, что во всех случаях задача путем последовательных подстановок сводится к системе двух линейных уравнений между амплитудами входящих и выходящих волн, решение которой позволяет получить амплитуды выходящих волн через амплитуды входящих.

8. Рассмотрена возможность численной реализации решения задачи о распространении одномерной волны через многослойную структуру методом исключения. Приведена схема машинного алгоритма, состоящего в выполнении последовательных шагов расчета, включающая в себя три цикла, из которых один удобно может быть оформлен в виде отдельной подпрограммы.

9. Кратко рассмотрены особенности расчета с использованием других способов решения, кроме использования прямой передачи первого рода. Отмечены особенности соотношений между функциями первого и второго рода для произвольной среды и вида ячейки внутри структуры, а также на входном и выходном концах структуры.

10. Приведена краткая схема обобщения математического аппарата метода исключения на случай электромагнитных волн нормального и наклонного падения продольной и поперечной поляризации. Дальнейшее развитие метода авторы рекомендуют любознательному читателю в качестве полезного упражнения.



## Глава 11

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИСКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ЧЕРЕЗ СТРУКТУРЫ С ЛИНЕЙНЫМИ И КВАДРАТИЧНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Глава посвящена применению развитого в предыдущей главе метода исключения для решения практических задач о распространении волн в неоднородных средах. В качестве наиболее простых примеров неоднородностей выбрана линейная и квадратичная полуэллиптическая. Получены амплитуды распространяющихся волн и оценена корректность приближения плавной неоднородности ступенчатой.

В главе частично использован материал монографии [62, стр. 32–47] и статей [90,91]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 11.1. Линейная неоднородность

В предыдущей главе 10 рассмотрен метод расчета амплитуд отраженной и проходящей волн при падении двух встречных волн на многослойную структуру со ступенчатой неоднородностью, названный методом исключения. В рамках метода получены условия сопряжения, найдены соотношения прямой передачи и рекуррентные формулы, определяющие амплитуды выходящих из структуры волн через амплитуды волн, в нее входящих.

Проиллюстрируем теперь работу метода исключения на частном примере, в качестве которого обратимся к задаче о распространении волны в неоднородной среде с линейным изменением волнового числа по координате. Расчет выполним по формулам (10.517)–(10.518) с использованием машинной реализации алгоритма, приведенного в разделе 10.14.

Пусть рассматриваемая неоднородная среда ограничена координатами  $x_0$  и  $x_N$ , то есть имеет полную толщину

$$L = x_N - x_0, \quad (11.1)$$

а волновое число внутри нее меняется по линейному закону:

$$k = k_1 + \frac{k_N - k_1}{x_N} x, \quad (11.2)$$

где  $k_1$  и  $k_N$  — волновые числа при  $x_0$  и  $x_N$  соответственно.

Представим среду в виде многослойной структуры длиной  $L$ , заключенной в пределах от  $x_0$  до  $x_N$ , состоящей из  $N$  однородных сред одинаковой толщины.

Будем полагать, что волновое число с такой структуре меняется ступенчатым образом так, что для среды с номером  $n$ , где  $1 \leq n \leq N$ , то есть при  $x_{n-1} < x < x_n$  волновое число сохраняется постоянным, равным

$$k_n = n(k_N - k_1)/N. \quad (11.3)$$

При этом длины всех ступенек изменения волнового числа одинаковы и равны

$$d_n = L/N, \quad (11.4)$$

а высоты также одинаковы и составляют

$$\Delta k(N) = (k_N - k_1)/N. \quad (11.5)$$

В разделе 9.5 (особенно 9.5.1–9.5.2) получен критерий применимости приближения линейной неоднородности ступенчатой функцией, в частности показано, что такое приближение является достаточно корректным тогда, когда минимальная длина волны в структуре превышает полную длину структуры не менее чем в два раза. В работе [1, стр. 123–125] показано, что метод усреднения дает достаточно корректные результаты тогда, когда толщина отдельного слоя не превышает 0,35 от длины волны в этом слое.

Рассмотрим корректность поставленной задачи с этих двух точек зрения на конкретном численном примере десятислойной структуры ( $N = 10$ ), волновое число в которой меняется от  $k_1 = 1,0 \text{ см}^{-1}$  до  $k_{10} = 5,5 \text{ см}^{-1}$  с шагом  $\Delta k = 0,5 \text{ см}^{-1}$ , причем для получения параметра  $\alpha_n$  воспользуемся методами прямым (10.38) и усреднения (10.57).

Для этого случая на рис. 11.1 при  $A_P = 1$ ,  $B_P = 0$  показаны зависимости волнового числа  $k_n$  и параметра  $\alpha_n$  от координаты  $x$  при получении параметра  $\alpha_n$  прямым методом (сплошные линии) и методом усреднения (пунктир) для трех различных длин структуры в целом: 0,1 см (а), 1,0 см (б) и 10,0 см (в).

Минимальная длина волны соответствует максимальному значению волнового числа  $k_{10}$ , откуда получаем:  $\lambda_{10} = 1,14 \text{ см}$ . Это означает, что предел корректности ступенчатого приближения для полной длины структуры, соответствующий половине минимальной длины волны, равен 0,57 см. Предел применимости метода усреднения для одного слоя структуры составляет 0,40 см, то есть этот метод работает удовлетворительно только тогда, когда полная длина структуры не превышает 0,40 см.

Из рис. 11.1 видно, что при  $L = 0,1 \text{ см}$  (а) параметры  $\alpha_n$ , полученные обоими методами, полностью совпадают. При  $L = 1,0 \text{ см}$  (б) совпадение наблюдается только до  $x = 0,4 \text{ см}$ , после чего метод усреднения дает несколько заниженные значения. Отмеченное значение  $x$  соответствует  $k = 3,0 \text{ см}^{-1}$  или  $0,35\lambda = 0,73 \text{ см}$ , что несколько превышает

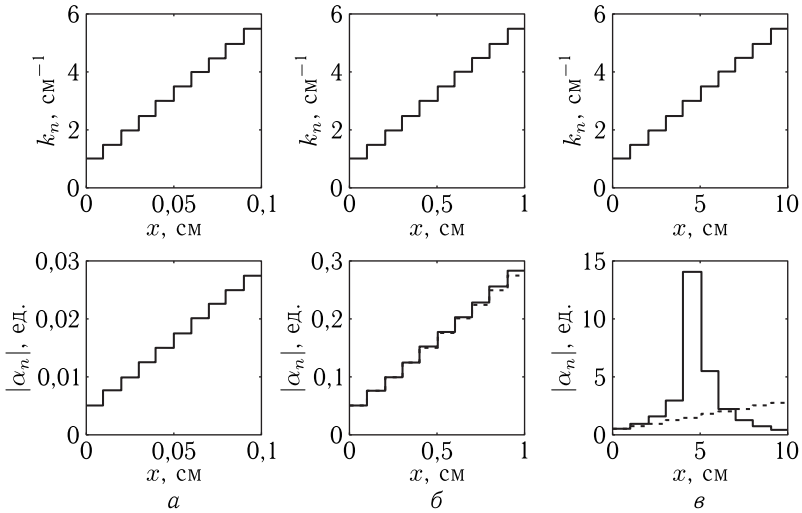


Рис. 11.1. Зависимости волнового числа  $k_n$  (верхний ряд рисунков) и параметра  $\alpha_n$  (нижний ряд рисунков) от координаты  $x$  при получении параметра  $\alpha_n$  методами: прямым (сплошные линии) и усреднения (пунктир).  $a - L = 0,1$  см;  $б - L = 1,0$  см;  $в - L = 10,0$  см

критическое значение  $0,40$  см, то есть условия применимости метода усреднения нарушаются, что и обуславливает наблюдаемое отклонение.

При  $L = 10,0$  см ( $в$ ) о каком-то соответствии можно говорить только не более чем до  $x = 3$  см, после чего параметры  $\alpha_n$ , полученные разными методами, отличаются уже в два и более раз, то есть метод усреднения становится совершенно неприменимым.

Рассмотрим теперь для той же структуры работу обоих методов при различной полной длине структуры. Для этого случая на рис. 11.2 показаны зависимости амплитуд выходящих волн  $A_S$  (кривые 1, 1') и  $B_S$  (кривые 2, 2') от полной длины структуры  $L$  при  $A_P = 1$ ,  $B_P = 0$ , где  $\alpha_n$  получено прямым методом (сплошные линии) и методом усреднения (пунктир). Стрелкой внизу отмечено критическое значение полной длины структуры  $L = 0,57$  см, выше которого условия применимости ступенчатого приближения нарушаются.

Из рисунка видно, что при  $L = 0,90$  см все кривые претерпевают определенный излом, то есть их наклон заметно меняется. Это означает, что ступенчатое приближение еще удовлетворительно работает до величины порядка  $1,5$  от критического значения, после чего, особенно с  $L = 2$  см (больше критического значения почти в четыре раза) зависимости приобретают изломанный характер.

Метод усреднения с точностью порядка  $5\%$  работает до  $L = 2$  см, после чего о соответствии до  $20\%$  можно говорить вплоть до  $L = 4$  см, а затем ошибка, особенно по амплитуде отраженной волны, резко

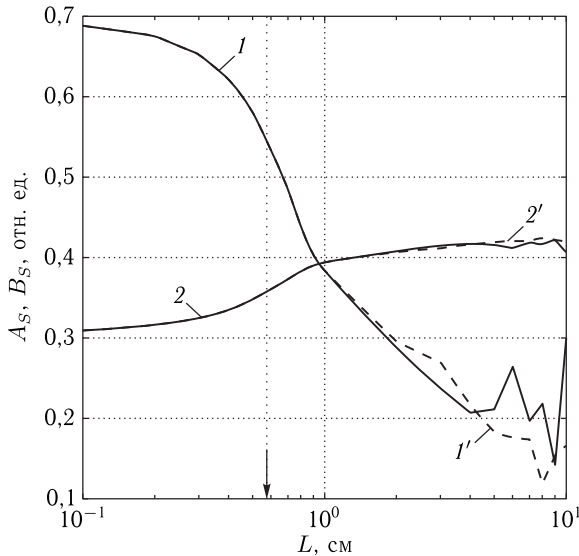


Рис. 11.2. Зависимости амплитуд выходящих из структуры волн: отраженной  $B_S$  (кривые 1, 1') и проходящей  $A_S$  (кривые 2, 2') при  $A_P = 1$ ,  $B_P = 0$  от полной длины структуры  $L$ , с использованием параметра  $\alpha_n$ , полученного методами: прямым (сплошные линии) и усреднения (пунктир)

возрастает. Таким образом, и здесь корректность метода усреднения ожидаемому критерию, установленному в работе [1, стр. 123–125], а также здесь в разделе 9.5 (особенно 9.5.1–9.5.2), полностью соответствует.

## 11.2. Квадратичная полуцилиндрическая неоднородность

Обратимся теперь к другим примерам применения метода исключения. Рассмотрим распространение одномерных волн в неоднородной структуре типа пластины, плотность которой на ее внешних границах одинакова, а внутри пластины сначала нарастает, а затем убывает или наоборот. Полагая волновое число распространяющейся волны пропорциональным плотности среды, можно считать, что это число в начале и конце структуры имеет одно и то же значение, а внутри структуры сначала монотонно нарастает, а затем, пройдя через максимум, также монотонно убывает, или сначала убывает, после чего таким же образом нарастает. В более общем случае можно рассматривать стопку таких структур, следующих друг за другом.

Такой вид неоднородности является достаточно общим, например, подобными свойствами обладает простая стеклянная пластинка в воздухе, слой жидкости, заключенный в сосуд с прозрачными стенками,

слой воздуха в атмосфере или воды в океане, имеющий температуру отличную от прилежащих слоев, и многие другие структуры.

Будем называть такую неоднородность среды «неоднородностью полуцилиндрического вида». Для простоты рассмотрим структуру, симметричную относительно ее центральной плоскости, а изменение волнового числа по координате будем предполагать происходящим по квадратичному закону. Такую структуру будем называть квадратичной неоднородностью полуцилиндрического вида. Полную длину структуры будем обозначать через  $L$ .

Схема зависимости волнового числа от координаты для такой структуры иллюстрируется рис. 11.3.

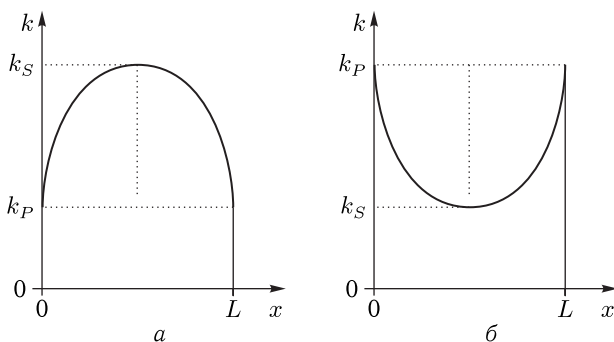


Рис. 11.3. Схема квадратичной полуцилиндрической неоднородности.  $a$  — неоднородность положительного вида;  $b$  — неоднородность отрицательного вида

На рис. 11.3,  $a$  показана зависимость волнового числа от координаты  $x$  для неоднородности «положительного вида», в середине которой волновое число имеет максимум равный  $k_S$ , при этом на краях волновое число равно  $k_P$ , причем  $k_S > k_P$ . На рис. 11.3,  $b$  показана зависимость волнового числа от координаты  $x$  для неоднородности «отрицательного вида», в середине которой волновое число имеет минимум равный  $k_S$ , при этом на краях волновое число равно  $k_P$ , причем  $k_S < k_P$ .

Из рисунка можно видеть, что зависимость волнового числа от координаты представляет собой постоянную величину  $k_P$ , которую далее будем называть «пьедесталом», в сочетании с зависящей от  $x$  величиной, принимающей в точках экстремума значение  $k_S$ . Для определенности величину  $h_S = k_S - k_P$  будем называть «стрелой прогиба». Для неоднородности положительного вида стрела прогиба положительна:  $h_S > 0$ , для неоднородности отрицательного вида — отрицательна:  $h_S < 0$ . В отсутствие неоднородности  $h_S = 0$ .

Таким образом, квадратичную неоднородность полуцилиндрического вида можно охарактеризовать тремя числами: длиной  $L$ , пьедесталом  $k_P$  и стрелой прогиба  $h_S$ .

### 11.3. Полуэллиптическая неоднородность

Рассмотрим частный вид квадратичной зависимости, а именно такой, которая имеет вид половины эллипса. Такую неоднородность будем называть полуэллиптической.

Схема образования полуэллиптической неоднородности показана на рис. 11.4.

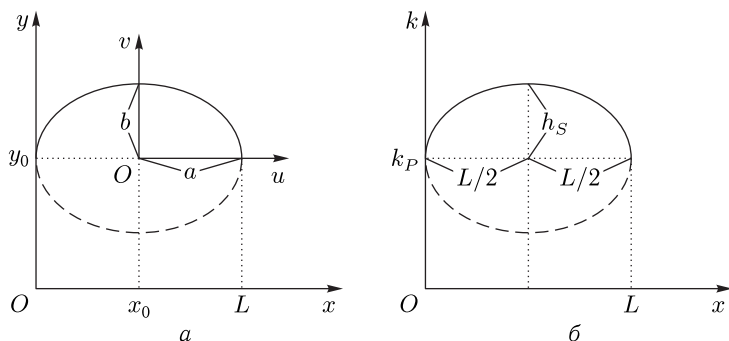


Рис. 11.4. Схема построения полуэллиптической неоднородности: *a* — система координат; *б* — параметры неоднородности

Пусть эллипс имеет полуоси  $a$  и  $b$ , то есть в системе  $Ouv$  его уравнение имеет вид:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1. \quad (11.6)$$

Из этого выражения получаем:

$$v = b \sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}}. \quad (11.7)$$

Координаты в системе  $Ouv$  связаны с координатами в системе  $Oxu$  соотношениями:

$$x = x_0 + u; \quad (11.8)$$

$$y = y_0 + v. \quad (11.9)$$

Подставляя (11.7) в (11.9) с учетом (11.8), получаем (рис. 11.4, *a*):

$$y = y_0 + b \sqrt{1 - \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2}. \quad (11.10)$$

Положим, что полученная зависимость  $y$  от  $x$  соответствует зависимости волнового числа  $k$  от той же координаты  $x$ , то есть введем обозначения:  $y \rightarrow k$ ,  $x \rightarrow x$ .

Полуэллиптическая неоднородность, как зависимость волнового числа  $k$  от координаты  $x$ , характеризуется тремя числами: длиной  $L$ , пьедесталом  $k_P$  и стрелой прогиба  $h_P$ .

Характерные значения координат в системе  $Oxy$  и параметры эллипса связаны с этими величинами следующими соотношениями:

$$x_0 = L/2; \quad (11.11)$$

$$y_0 = k_P; \quad (11.12)$$

$$a = L/2; \quad (11.13)$$

$$b = h_S. \quad (11.14)$$

При этом, в соответствии с (11.10), зависимость волнового числа  $k$  от координаты  $x$  принимает вид (рис. 11.4, б):

$$k = k_P + \frac{2h_S}{L} \sqrt{x(L-x)}. \quad (11.15)$$

В случае, если профиль неоднородности соответствует нижней половине эллипса, то зависимость волнового числа  $k$  от координаты  $x$  имеет вид:

$$k = k_P - \frac{2h_S}{L} \sqrt{x(L-x)}. \quad (11.16)$$

### 11.3.1. Приближение полуэллиптической неоднородности ступенчатой структурой

Рассмотрим теперь приближение полуэллиптической неоднородности структурой со ступенчатым распределением значений волновых чисел в слоях. Схема такого приближения в нормированных единицах иллюстрируется рис. 11.5, где сплошной линией показано распреде-

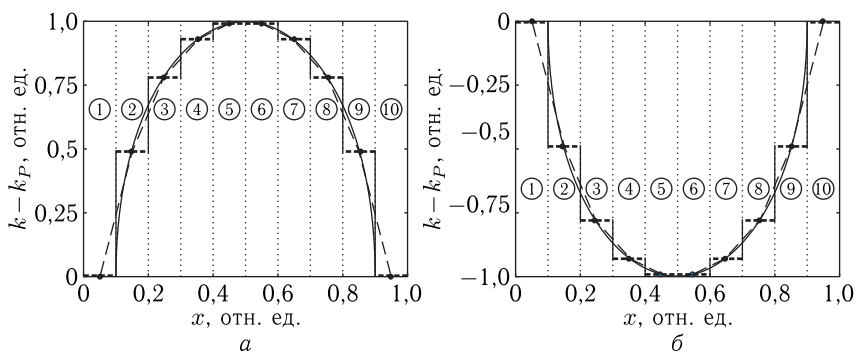


Рис. 11.5. Схема приближения полуэллиптической неоднородности ступенчатой структурой. Цифры в кругах — номера сред ступенчатой структуры. Точки и утолщенные пунктирные линии — значения волновых чисел в средах. Сплошная дугообразная линия — непрерывное распределение волновых чисел. Пунктирные линии между точками — отрезки прямых.  $a$  — неоднородность положительного вида;  $b$  — неоднородность отрицательного вида

ление волнового числа для неоднородности положительного вида (а) ( $L = 1$  отн. ед.,  $k_P = 1$  отн. ед.,  $k_S = 2$  отн. ед.):

$$k - k_P = 2 \cdot \sqrt{x \cdot (1 - x)} \quad (11.17)$$

и для неоднородности отрицательного вида (б) ( $L = 1$  отн. ед.,  $k_P = 2$  отн. ед.,  $k_S = 1$  отн. ед.):

$$k - k_P = -2 \cdot \sqrt{x \cdot (1 - x)}. \quad (11.18)$$

Эти неоднородности приближаются ступенчатой многослойной структурой, состоящей из 10 слоев, каждый толщиной 0.1 отн. ед., со ступенчатым распределением волнового числа по средам отдельных слоев (утолщенные пунктирные линии).

Из рисунка видно, что наилучшую точность ступенчатое приближение обеспечивает в центре структуры, где она составляет 0,9%, тогда как на краях точность падает и составляет около 20%. Такое падение точности на краях структуры вызвано тем, что в центре структуры волновое число по координате меняется медленно, а вблизи краев структуры — быстро, тогда как длина ступеньки в обоих случаях остается постоянной. Это ограничение не является принципиальным и легко преодолевается использованием переменной длины ступенек. При этом длина ступенек вблизи краев структуры относительно их длины в центре должна уменьшаться.

### 11.3.2. Критерий применимости ступенчатого приближения

В главе 9 (разделы 9.5.1, 9.5.2) настоящей монографии показано, что ступенчатое приближение применимо к плавно меняющейся среде только в случае, когда минимальная длина волны в структуре превышает полную длину структуры не менее чем в два раза, то есть критерий применимости ступенчатого приближения имеет вид:

$$\lambda_{\min} \geq 2L. \quad (11.19)$$

Минимальная длина волны для неоднородности положительного вида определяется максимальным значением волнового числа, при заданных значениях пьедестала  $k_P$  и стрелы прогиба  $h_S$  равным  $k_{\max} = k_P + h_S$ . При этом критерий (11.19) принимает вид:

$$L^{(+)} \leq \frac{\pi}{k_P + h_S}. \quad (11.20)$$

Для неоднородности отрицательного вида максимальное значение волнового числа равно  $k_{\max} = k_P$ , поэтому критерий (11.19) не зависит от стрелы прогиба  $h_S$  и имеет вид:

$$L^{(-)} \leq \frac{\pi}{k_P}. \quad (11.21)$$

В рассмотренных далее примерах длина измеряется в см, а волновое число — соответственно в  $\text{см}^{-1}$ . При этом, полагая  $k_P = 1 \text{ см}^{-1}$



и  $h_S = 0,5 \text{ см}^{-1}$ , получаем ограничение на максимальную допустимую длину структуры:  $L^{(+)} \leq 2,09 \text{ см}$ ,  $L^{(-)} \leq 3,14 \text{ см}$ , то есть длина должна выбираться меньше этих значений.

### 11.3.3. Полуэллиптические неоднородности частных видов

В качестве примера рассмотрим распространение волн через эллиптические неоднородности, зависимость волнового числа от координаты для которых иллюстрируется рис. 11.6. Решение проведем с помощью формул (10.517)–(10.518) для двух ступенчатых структур из десяти и двадцати слоев, описывающих различные неоднородности полуэллиптического вида.

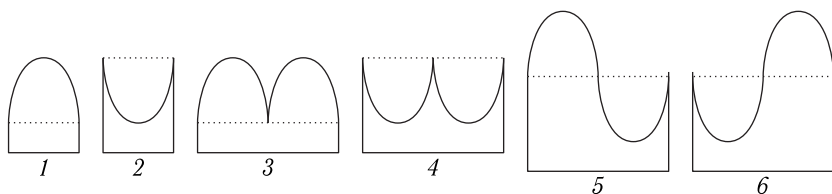


Рис. 11.6. Различные виды полуэллиптических неоднородностей: 1 — положительная; 2 — отрицательная; 3 — дважды положительная; 4 — дважды отрицательная; 5 — положительно-отрицательная; 6 — отрицательно-положительная

В таблице 11.1 для неоднородностей 1–6 видов приведены амплитуды выходящих из структуры волн при падении на структуру волн единичной амплитуды прямого и встречного направлений. При расчете полагалось:  $k_P = 1 \text{ см}^{-1}$ ,  $h_S = 0,5 \text{ см}^{-1}$ , для случаев 1–2 —  $L = 1 \text{ см}$ , 3–6 —  $L = 2 \text{ см}$ .

Таблица 11.1. Амплитуды волн, выходящих из структур различных видов при падении прямых и встречных волн

№	$A_P = 1; B_P = 0$		$A_P = 0; B_P = 1$		$A_P = 1; B_P = 1$		$\sqrt{B_S^2 + A_S^2}$
	$B_S$	$A_S$	$B_S$	$A_S$	$B_S$	$A_S$	
1	0,3099	0,9508	0,9508	0,3099	1,0000	1,0000	1,4142
2	0,2387	0,9711	0,9711	0,2387	1,0000	1,0000	1,4142
3	0,1502	0,9887	0,9887	0,1505	1,0000	1,0000	1,4142
4	0,3507	0,9365	0,9365	0,3507	1,0000	1,0000	1,4142
5	0,4577	0,8891	0,8891	0,4577	1,3250	0,4943	1,4142
6	0,4577	0,8891	0,8891	0,4577	0,4943	1,3250	1,4142

В первом столбце таблицы приведены номера структур, показанных на рис. 11.6. Следующие два столбца (второй и третий) соответствуют падению на структуры волны прямого направления  $A_P = 1$ ,  $B_P = 0$ . Приведены амплитуды волн, выходящих из структуры в прямом  $A_S$  и встречном  $B_S$  направлениях. Следующая пара столбцов (четвертый

и пятый) соответствует падению на структуру волны встречного направления  $A_P = 1$ ,  $B_P = 1$ . Показаны амплитуды волн, выходящих из структуры в прямом  $A_S$  и встречном  $B_S$  направлениях. Следующие два столбца (шестой и седьмой) соответствуют одновременному падению прямых и встречных волн  $A_P = 1$  и  $B_P = 1$ . В последнем (восьмом) столбце таблицы приведено для последнего случая представлено выражение  $\sqrt{B_S^2 + A_S^2}$ , отражающее суммарный поток энергии выходящих волн.

Из первой и второй пары столбцов таблицы (столбцы 2, 3 и 4, 5) видно, что все структуры являются полностью взаимными, то есть при изменении направления распространения волны амплитуды отраженной и проходящей волн, сохраняя свои значения, меняются местами. Проявление взаимности здесь соответствует общему свойству волноведущих структур, в которых прямые и встречные волны распространяются в одинаковых условиях [130, стр. 130–132], [112, стр. 246–248].

При одновременном падении волн единичной амплитуды с обеих сторон (столбцы 6, 7), в случае единичных (1, 2) и дважды положительных (3) или дважды отрицательных (4) структур амплитуды волн, выходящих в обе стороны, равны единице. Однако в случае положительно-отрицательной (5) и отрицательно-положительной (6) структур амплитуды волн, выходящих из структуры, меняются местами. Соответствие единице амплитуд выходящих волн в 1–4 случаях определяется зеркальной симметрией таких структур, тогда как взаимная перемена амплитуд выходящих волн в 5 и 6 случаях определяется их антисимметричностью.

При падении двух волн (столбец 8) потоки энергии всех выходящих волн всегда остаются одинаковыми, равными сумме потоков энергии входящих волн, что соответствует закону сохранения энергии.

Таким образом, можно сделать вывод, что применение метода исключения в сочетании со ступенчатым приближением структуры с эллиптическими неоднородностями различных видов позволяет найти амплитуды отраженной и проходящей волн вполне приемлемым образом.

## Выводы по главе 11

Данная глава посвящена применению метода исключения к распространению одномерной волны в многослойной структуре, содержащей неоднородность линейно нарастающего и полуэллиптического вида. Получены амплитуды выходящих волн при падении на структуру волн прямого и встречного направлений. Оценена корректность ступенчатого приближения.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. В качестве достаточно простого примера рассмотрено применение метода исключения для исследования распространения волн

в неоднородной среде с линейным нарастанием волнового числа по координате. Рассмотрение выполнено путем представления среды в виде ступенчатой структуры с равным шагом ступенек по волновому числу и по координате. Получен критерий применимости приближения линейной неоднородности ступенчатой функцией, в частности показано, что такое приближение является достаточно корректным тогда, когда минимальная длина волны в структуре превышает полную длину структуры не менее чем в два раза. Отмечено совпадение такого критерия с критерием, ранее полученным методом обобщенного импеданса.

2. Работа метода исключения продемонстрирована на примере неоднородной среды, волновое число в которой меняется по полуэллиптическому закону. Показана возможность представления полуэллиптических неоднородностей в виде многослойной структуры, свойства которой определяются тремя параметрами: длиной, пьедесталом и стрелой прогиба. Получены амплитуды отраженной и проходящей волн для различных видов полуэллиптических неоднородностей. Наблюдаемые особенности распространения встречных волн интерпретированы на основе соотношений взаимности, свойств симметрии структуры и сохранения энергии распространяющихся волн.

## Глава 12

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИСКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ЧЕРЕЗ СТРУКТУРЫ С БАРЬЕРНЫМИ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Глава посвящена применению метода исключения для решения практических задач о распространении волн в неоднородных средах. В качестве примеров выбраны два вида неоднородностей — барьерные и периодические. Получены амплитуды распространяющихся волн при различном числе, конфигурации и расположении барьеров. Определены особенности прохождения волн через образованные барьерами периодические структуры, выявлен эффект вторичной модуляции коэффициентов отражения и прохождения, оценено влияние диссипации.

В главе частично использован материал монографии [62, стр. 48–77] и статей [92, 94, 99]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 12.1. Геометрия задачи и схема барьерной неоднородности

Будем рассматривать падение двух встречных одномерных волн на многослойную структуру, представляющую собой совокупность слоев, каждый из которых в отдельности однороден, а на границах между слоями параметры соседствующих сред скачком меняются, причем это изменение может происходить в обе стороны, то есть волновое число распространяющейся волны может как увеличиваться, так и уменьшаться. С точки зрения распространения волны такую структуру можно рассматривать как совокупность примыкающих друг к другу прямоугольных барьеров разной высоты, поэтому будем называть ее «структурой с барьерной неоднородностью».

На рис. 12.1 показана схема рассматриваемой далее такой структуры. Исследуемая структура содержит 20 сред (номера показаны цифрами в кругах), границы между которыми соответствуют координатам  $x_0, x_1, \dots, x_{20}$ . Утолщенными горизонтальными линиями показана зависимость волнового числа от координаты. Волновые числа внутри сред принимают два значения  $k_0$  и  $k_1$ , причем в первой и последней средах волновое число равно  $k_0$ .

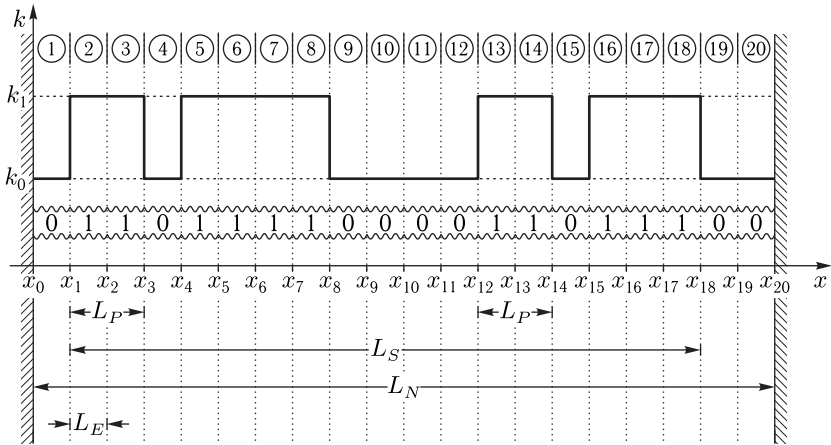


Рис. 12.1. Схема многослойной структуры с барьерной неоднородностью

Структура содержит несколько барьеров, для обращения к которым будем использовать обозначение  $X_{i-k}$ , где  $i$  — координата начала барьера,  $k$  — координата его конца. Так для барьера между координатами  $x_1$  и  $x_3$  будем использовать обозначение  $X_{1-3}$ , для барьера между координатами  $x_4$  и  $x_8$  — обозначение  $X_{4-8}$ , для барьера между  $x_{12}$  и  $x_{14}$  — обозначение  $X_{12-14}$  и между  $x_{15}$  и  $x_{18}$  —  $X_{15-18}$ . Последовательное распределение волновых чисел по слоям структуры можно характеризовать заданием последовательности нулей и единиц, в которой ноль соответствует  $k_0$ , а единица —  $k_1$ . Такая последовательность показана на рисунке между двумя волнистыми линиями и имеет вид: 0110111000011011100.

Структура может содержать несколько барьеров различной длины. Для дальнейшего рассмотрения важны два параметра: минимальная длина барьера  $L_P$ , соответствующая самому короткому барьеру, а также полная длина неоднородности  $L_S$ , соответствующая расстоянию от начала первого барьера до конца последнего. При этом полную длину структуры будем обозначать  $L_N$ . Для интерпретации описанных далее результатов удобно ввести понятие «элементарного барьера». Полагая толщины всех слоев структуры равными друг другу, будем называть «элементарным барьером» такой барьер, длина которого равна толщине одного слоя. Длину элементарного барьера обозначим через  $L_E$ . В общем случае  $L_P \geq L_E$ .

В качестве частного случая барьерной неоднородности можно рассматривать структуру, состоящую из нескольких одинаковых барьеров, расположенных периодически. В случае такой периодической структуры будем полагать, что внутри барьеров волновое число равно  $k_1$ , а между ними —  $k_0$ .

Как и ранее, амплитуды волн, распространяющихся в средах в прямом направлении, будем обозначать через  $A_n$ , а распространяющихся во встречном направлении —  $B_n$ , где  $n$  — номер соответствующей среды.

## 12.2. Метод исключения для барьерной неоднородности

При работе методом исключения (глава 10, [90]) для каждой среды рассматриваются две волновые функции, одна из которых является суммой прямой и встречной волн, а другая — частным от деления производной от первой на волновое число. Вся структура разбивается на ячейки, каждая из которых включает в себя одну среду и одну границу. После нахождения соотношений между упомянутыми функциями на внешних сторонах каждой ячейки полученные соотношения сшиваются «прикладыванием» друг к другу, в результате чего амплитуды внутренних волн исключаются. Для структуры в целом получается система из двух линейных уравнений, связывающая неизвестные амплитуды выходящих волн  $H_1$  и  $H_2$  с заданными амплитудами входящих  $A_P$  и  $B_P$ , коэффициенты в которой выражаются через параметры сред. В главе 9 эта система приведена в виде формул (10.497)–(10.498) с множеством следующих далее коэффициентов (10.499)–(10.514). Решение этой системы, получено в главе 9 в виде формул (10.517), (10.518). Ввиду важности для дальнейшего рассмотрения, приведем это решение здесь еще раз с сохранением мнимости в знаменателе:

$$A_S = A_P \frac{2(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} H_1 + B_P \frac{(G_{11} - G_{22}) + i(G_{12} + G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})}; \quad (12.1)$$

$$B_S = -A_P \frac{(G_{11} - G_{22}) - i(G_{12} + G_{21})}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} \frac{H_1}{H_2} + B_P \frac{1}{(G_{11} + G_{22}) + i(G_{12} - G_{21})} \frac{2}{H_2}, \quad (12.2)$$

где функции  $G_{ik} \equiv G_{ik}^{[NS]}$  (верхний индекс «NS» для простоты записи опущен). Для  $n = 1$  и  $n = 2$  эти функции определяются по формулам:

$$G_{11}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2}; \quad (12.3)$$

$$G_{12}^{[n]} = \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_{n-1}}{k_n}; \quad (12.4)$$

$$G_{21}^{[n]} = -\frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n^2}; \quad (12.5)$$

$$G_{22}^{[n]} = \frac{1 - \alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2} \frac{k_{n-1}}{k_n}; \quad (12.6)$$

где в случае прямого метода (10.38) параметр  $\alpha_n$  имеет вид:

$$\alpha_n = -i \frac{1 - e^{-ik_n d_n}}{1 + e^{-ik_n d_n}}. \quad (12.7)$$

а все последующие функции  $G_{ik}^{[nS]}$ , начиная с  $G_{ik}^{[2S]}$  (то есть  $n = 3$ ), получаются из предыдущих с помощью рекуррентных формул:

$$G_{11}^{[nS]} = G_{11}^{[n]} G_{11}^{[n-1S]} + G_{12}^{[n]} G_{21}^{[n-1S]}; \quad (12.8)$$

$$G_{12}^{[nS]} = G_{11}^{[n]} G_{12}^{[n-1S]} + G_{12}^{[n]} G_{22}^{[n-1S]}; \quad (12.9)$$

$$G_{21}^{[nS]} = G_{21}^{[n]} G_{11}^{[n-1S]} + G_{22}^{[n]} G_{21}^{[n-1S]}; \quad (12.10)$$

$$G_{22}^{[nS]} = G_{21}^{[n]} G_{12}^{[n-1S]} + G_{22}^{[n]} G_{22}^{[n-1S]}. \quad (12.11)$$

При этом функции  $H_{1,2}$  равны:

$$H_1 = \frac{(1 - i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}; \quad (12.12)$$

$$H_1 = \frac{(1 + i\alpha_1)^2}{1 + \alpha_1^2}. \quad (12.13)$$

### 12.2.1. Энергетические параметры распространения волн

Найденные амплитуды отраженной и проходящей волн  $B_S$  (12.2) и  $A_S$  (12.1) позволяют определить энергетические коэффициенты, характеризующие распространение волны. Для случая падения одной волны в положительном направлении оси  $Ox$ , то есть при  $A_P \neq 0$ ,  $B_P = 0$ , энергетические коэффициенты отражения  $R$ , прохождения  $T$  и поглощения  $A$  имеют вид:

$$R = \left| \frac{B_S}{A_P} \right|^2; \quad (12.14)$$

$$T = \left| \frac{A_S}{A_P} \right|^2; \quad (12.15)$$

$$A = 1 - R - T. \quad (12.16)$$

### 12.2.2. Зависимость от частоты и диссипации среды

Метод исключения предполагает заданными волновые числа в отдельных средах, тогда как основной задачей дальнейшего рассмотрения является исследование частотных свойств структуры в целом. Для получения частотной зависимости амплитуд отраженной и падающей волн введем зависимость волнового числа от частоты через скорость волны с помощью соотношения

$$k = \frac{\omega}{v}, \quad (12.17)$$

то есть будем считать, что при постоянной скорости и изменяющейся частоте волновое число меняется прямо пропорционально частоте.

При этом длина волны равна:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega}. \quad (12.18)$$

Если задана скорость и известна длина волны, то частоту, при которой волна принимает заданную длину, можно определить из соотношения

$$\omega_\lambda = \frac{2\pi v}{\lambda}. \quad (12.19)$$

Так, при  $v = 1,001 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  длине волны  $\lambda = 1 \text{ см}$  соответствует частота  $6,2896 \text{ с}^{-1}$ , а длине волны  $\lambda = 2 \text{ см}$  соответствует частота  $3,1447 \text{ с}^{-1}$ .

Затухание волны за счет диссипативных свойств среды будем учитывать путем введения мнимой добавки  $i\xi$  к действительной части  $\eta$  волнового числа, которое в этом случае становится комплексным:

$$k = \eta - i\xi, \quad (12.20)$$

где  $\eta \geq 0$  и  $\xi \geq 0$  — величины действительные.

### 12.3. Прохождение волны через единичный барьер

Рассмотрим сначала общий характер распространения волны через среду с единственной неоднородностью в виде прямоугольного барьера, внутри которого и по обе стороны от него среда однородна, причем параметры сред по разные стороны от барьера одинаковы, а внутри барьера принимают отличное значение. Будем считать, что вне барьера скорость волны равна  $v_0$ , а внутри барьера —  $v_1$ , что соответствует волновым числам  $k_0 = \omega/v_0$  и  $k_1 = \omega/v_1$ . Поскольку барьер всего один, то длина неоднородности равна длине этого барьера:  $L_S = L_P$ . Общие свойства распространения волны через барьер иллюстрируются рис. 12.2, где показаны зависимости коэффициентов отражения (1), прохождения (2) и поглощения (3) от частоты при различных значениях комплексного волнового числа.

Рис. 12.2, а соответствует чисто действительному волновому числу:  $\text{Re}(k) = |k|$ ,  $\text{Im}(k) = 0$ . Из этого рисунка видно, что обе зависимости  $R(\omega)$  и  $T(\omega)$  имеют осциллирующий периодический вид, близкий к синусоидальному, причем минимумы отражения приходятся на максимумы прохождения. Зависимости  $R(\omega)$  и  $T(\omega)$  симметричны относительно уровня 0,5, а коэффициент поглощения  $A(\omega)$  всегда равен нулю. При изменении частоты амплитуды осцилляций зависимостей  $R(\omega)$  и  $T(\omega)$  сохраняются постоянными. Из численной оценки следует, что коэффициент отражения  $R(\omega)$  максимален тогда, когда длина барьера равна нечетному числу четвертей длин волн внутри барьера, и минимален тогда, когда эта длина равна четному числу четвертей длин волн. При этом первый минимум зависимости  $R(\omega)$  при  $\omega = 6,28 \text{ с}^{-1}$ , определяющий величину ее периода, соответствует



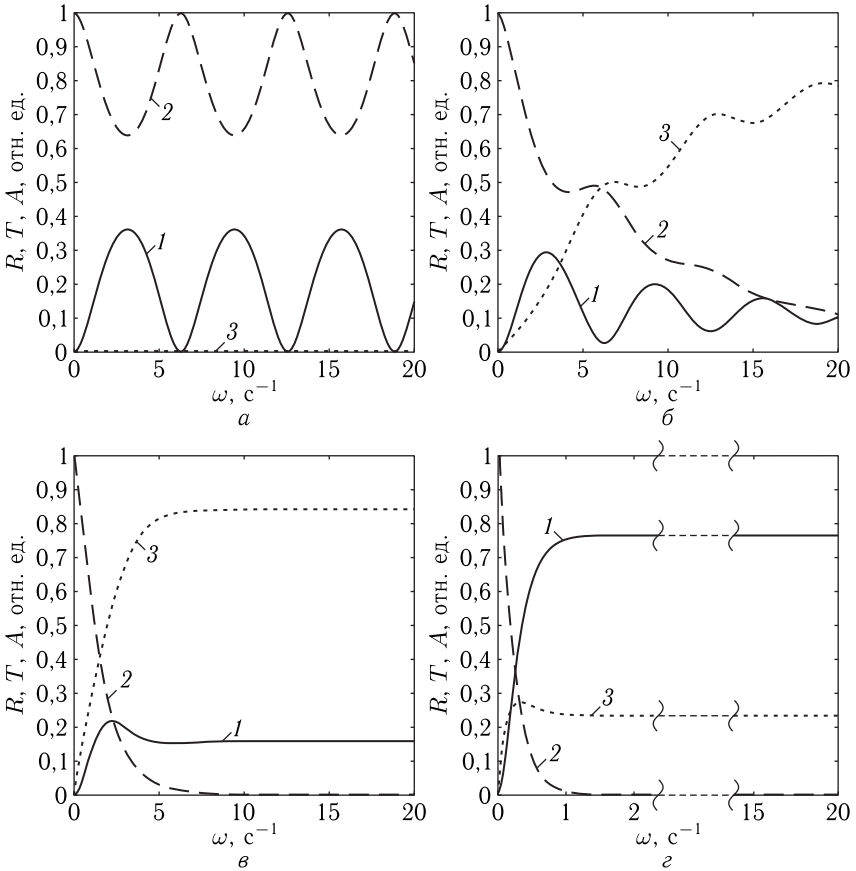


Рис. 12.2. Зависимости коэффициентов отражения (1), прохождения (2) и поглощения (3) от частоты для единичного барьера при комплексном волновом числе. Параметры:  $L_S = 1$  см;  $v_0 = 1$  см · с<sup>-1</sup>,  $k_0 = \omega/v_0$  см<sup>-1</sup>;  $v_1 = 2$  см · с<sup>-1</sup>.  
 а —  $k_1 = \omega/v_1 \cdot (1,0 - i \cdot 0)$  см<sup>-1</sup>; б —  $k_1 = \omega/v_1 \cdot (1,0 - i \cdot 0,10)$  см<sup>-1</sup>;  
 в —  $k_1 = \omega/v_1 \cdot (1,0 - i \cdot 0,70)$  см<sup>-1</sup>; г —  $k_1 = \omega/v_1 \cdot (1,0 - i \cdot 5,00)$  см<sup>-1</sup>

равенству между длиной барьера и половиной длины волны внутри него.

Вследствие симметрии зависимостей относительно уровня 0,5, для коэффициента прохождения  $T(\omega)$  эти соотношения заменяются на обратные.

Рис. 12.2, б соответствует случаю, когда волновое число уже имеет мнимую часть, однако она значительно меньше действительной:  $\text{Im}(k) \ll \text{Re}(k)$ . Как и в предыдущем случае здесь зависимости  $R(\omega)$  и  $T(\omega)$  осциллируют с тем же периодом, однако по мере увеличения частоты амплитуда осцилляций спадает, при этом коэффициент отра-

жения  $R(\omega)$  стремится к постоянному значению 0,11, а коэффициент прохождения  $T(\omega)$  стремится к нулю. Коэффициент поглощения резко возрастает, стремясь к постоянному значению 0,89. Затухание осцилляций до уровня 0,1 от максимума происходит при частоте  $\sim 25 \text{ с}^{-1}$ .

Рис. 12.2, *в* соответствует случаю, когда мнимая часть волнового числа имеет тот же порядок, что и действительная:  $\text{Im}(k) \sim \text{Re}(k)$ . Здесь осцилляции коэффициентов прохождения и поглощения полностью пропадают, а коэффициент отражения, претерпевая лишь одно незначительное переколебание, принимает постоянное значение 0,16. Коэффициент прохождения падает до нуля, а коэффициент поглощения стремится к величине 0,84. Стабилизация режимов происходит при частоте порядка  $8 \text{ с}^{-1}$ . Таким образом, начиная с этой частоты, поглощение энергии преобладает над отражением.

Рис. 12.2, *г* соответствует случаю, когда мнимая часть волнового числа значительно превышает действительную:  $\text{Im}(k) \gg \text{Re}(k)$ . Здесь какие-либо осцилляции также полностью отсутствуют, стабилизация режимов происходит уже при частоте порядка  $1 \text{ с}^{-1}$ , причем теперь уже отражение значительно преобладает над поглощением.

**Замечание.** Рассмотренная картина в случае электромагнитных волн для барьера в свободном пространстве соответствует различным видам проводимости составляющей барьер среды. Так рис. 12.2, *а* соответствует диэлектрику, рис. 12.2, *б* — полупроводнику с малой проводимостью, рис. 12.2, *в* — полупроводнику с высокой проводимостью, рис. 12.2, *г* — металлу.

### 12.3.1. Изменение длины единичного барьера

Рассмотрим теперь, что происходит с волной при изменении длины барьера. Поскольку основной характер частотных зависимостей при комплексном волновом числе уже выяснен, ограничимся рассмотрением действительного волнового числа. Из рис. 12.2, *а* следует, что в этом случае частотные зависимости коэффициента отражения и прохождения симметричны относительно уровня 0,5. Поэтому достаточно будет рассмотреть только коэффициент отражения. Характер поведения коэффициента отражения  $R$  при изменении длины барьера  $L_S$  иллюстрируется рис. 12.3, где приведены зависимости  $R(\omega)$  для барьеров длиной от 1 до 5 см с шагом в 1 см.

Для удобства построения наглядных рисунков, скорость волны внутри барьера выбрана близкой к единице:  $v_1 = 1,001 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . При этом скорость волны вне барьера, как и прежде, равна  $v_0 = 1,000 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Столь малое различие между скоростями внутри и вне барьера порождает довольно малое значение коэффициента отражения, порядка  $10^{-6}$ , что, однако, никак не мешает проследить основные закономерности во всех подробностях.

Если задана скорость и известна длина волны, то частота, при которой волна имеет заданную длину, определяется соотношением:  $\omega_\lambda = 2\pi v/\lambda$ . Так при  $v_1 = 1,001 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  длине волны  $\lambda = 1 \text{ см}$

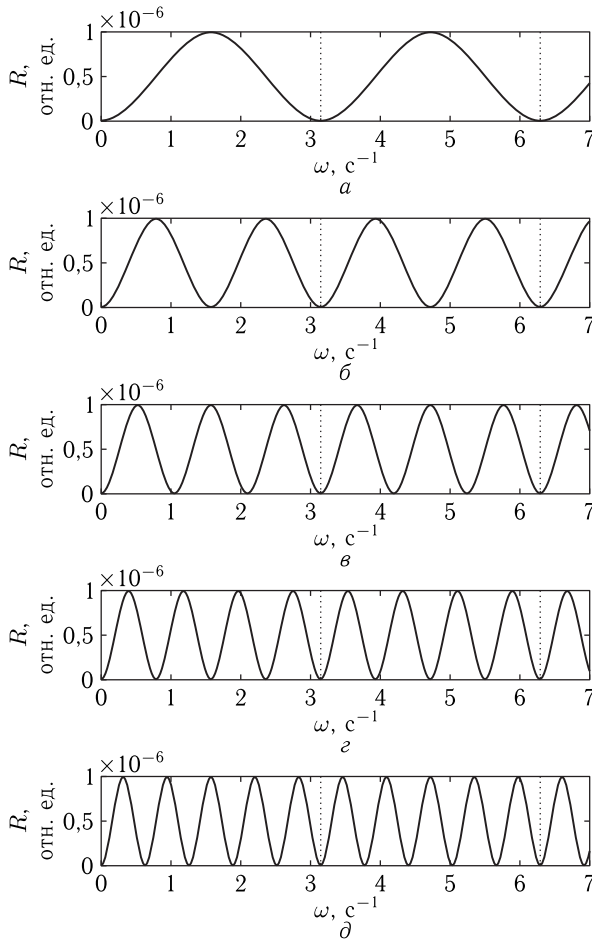


Рис. 12.3. Зависимости коэффициента отражения от частоты для барьеров разной длины. Вне барьера:  $v_0 = 1,000 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ , внутри барьера:  $v_1 = 1,001 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Длина барьера:  $a - 1 \text{ см}$ ;  $б - 2 \text{ см}$ ;  $в - 3 \text{ см}$ ;  $г - 4 \text{ см}$ ;  $д - 5 \text{ см}$

соответствует частота  $6,2896 \text{ с}^{-1}$ , а длине волны  $\lambda = 2 \text{ см}$  соответствует частота  $3,1447 \text{ с}^{-1}$ . Эти значения частот показаны на рис. 12.3 вертикальными точечными линиями.

Из рис. 12.3 видно, что зависимость коэффициента отражения от частоты при любой длине барьера является периодической, близкой к синусоидальной.

Рис. 12.3,  $a$  соответствует длине барьера  $L_S = 1 \text{ см}$ . Видно, что первый минимум зависимости  $R(\omega)$  приходится на частоту  $3,1447 \text{ с}^{-1}$ . Длина волны, соответствующая этой частоте, равна  $2 \text{ см}$ . Отражение

становится минимальным на той частоте, на которой половина длины волны становится равной длине барьера, как это отмечалось в предыдущем разделе. Второй минимум приходится на частоту, соответствующую двум длинам волн на длине барьера и так далее, то есть период зависимости  $R(\omega)$  равен  $3,1447 \text{ с}^{-1}$ .

Рис. 12.3, б соответствует увеличению длины барьера до 2 см, то есть в два раза. При этом первый минимум приходится на частоту вдвое ниже, то есть на  $1,5724 \text{ с}^{-1}$ . Остальные минимумы кратны этой величине, то есть период здесь становится вдвое короче.

Рис. 12.3, в соответствует увеличению длины барьера до 3 см, рис. 12.3, г — 4 см, рис. 12.3, д — 5 см. Во всех этих случаях период уменьшается в число раз, равное отношению длины барьера к первоначальной в 1 см, соответствующей минимальной длине барьера.

Таким образом, можно сказать, что при увеличении длины барьера первоначальная зависимость  $R(\omega)$  разбивается на одинаковые «лепестки», количество которых на длине первоначального периода равно отношению длины барьера к его первоначальной длине.

## 12.4. Прохождение волны через два единичных барьера

Рассмотрим теперь, что происходит с коэффициентом отражения в случае двух барьеров при различной их длине и расположении.

### 12.4.1. Изменение расстояния между барьерами

Характер поведения коэффициента отражения  $R$  при изменении расстояния между двумя одинаковыми барьерами иллюстрируется рис. 12.4, где приведены зависимости  $R(\omega)$  для барьеров длиной 1 см, расстояние между началами которых меняется от 0 до 5 см с шагом в 1 см. Положения барьеров иллюстрируются последовательностями нулей и единиц в подписи к рисунку (подобно рис. 12.1). Обозначения  $L_P$  и  $L_S$  также приведены на рис. 12.1. Зависимости нормированы на единицу (нормирующие множители приведены в подписи к рисунку). Для удобства сравнения с предыдущим случаем, скорость волны внутри барьеров выбрана равной:  $v_1 = 1,001 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . При этом скорость волны вне барьеров по-прежнему равна  $v_0 = 1,000 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Частоты  $3,1447 \text{ с}^{-1}$  и  $6,2896 \text{ с}^{-1}$ , соответствующие длинам волн  $\lambda = 2 \text{ см}$  и  $\lambda = 1 \text{ см}$ , отмечены на рис. 12.4 вертикальными точечными линиями.

Из рис. 12.4 видно, что зависимость коэффициента отражения от частоты при любом расстоянии между барьерами является периодической, причем величина периода всегда остается одной и той же равной  $3,1447 \text{ с}^{-1}$ , в данном случае определяемой длиной одного барьера. Однако близкий к синусоидальному характер зависимости  $R(\omega)$  наблюдается только для случаев 4а и 4б, а в случаях 4в, 4г, 4д

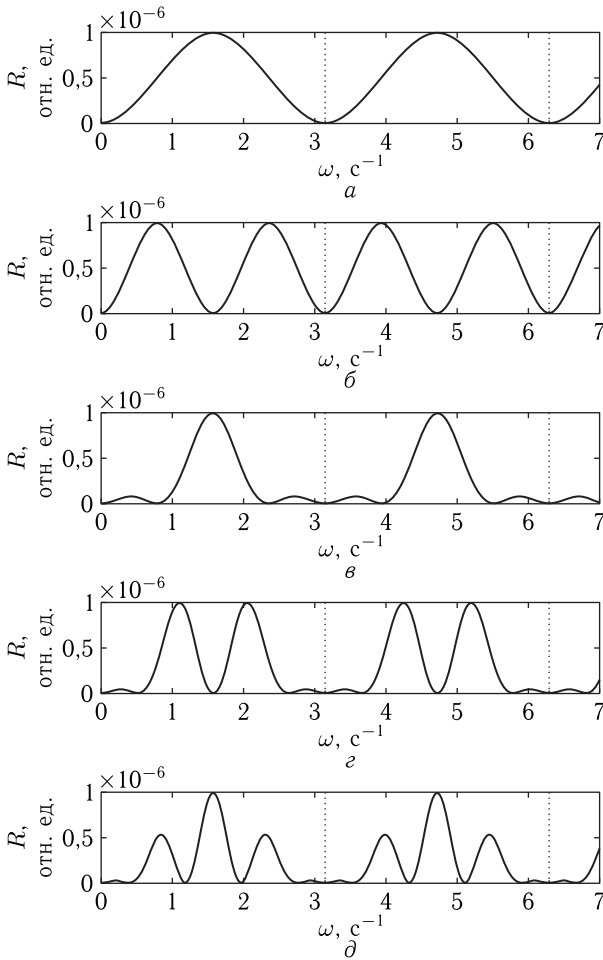


Рис. 12.4. Зависимости коэффициента отражения от частоты для двух барьеров на различном расстоянии. Скорости:  $v_0=1,000 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $v_1=1,001 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Длины барьеров: 1 см. Параметры с нормирующим множителем: *а* —  $X_{1-2}$ ,  $X_{1-2}$ ; 0100000000...0;  $L_S = 1 \text{ см}$ ,  $L_P = 1 \text{ см}$ ; 1,0000; *б* —  $X_{1-2}$ ,  $X_{2-3}$ ; 0110000000...0;  $L_S = 2 \text{ см}$ ,  $L_P = 1 \text{ см}$ ; 1,0000; *в* —  $X_{1-2}$ ,  $X_{3-4}$ ; 0101000000...0;  $L_S = 3 \text{ см}$ ,  $L_P = 1 \text{ см}$ ; 0,2500; *г* —  $X_{1-2}$ ,  $X_{4-5}$ ; 0100100000...0;  $L_S = 4 \text{ см}$ ,  $L_P = 1 \text{ см}$ ; 0,3215; *д* —  $X_{1-2}$ ,  $X_{5-6}$ ; 0100010000...0;  $L_S = 5 \text{ см}$ ,  $L_P = 1 \text{ см}$ ; 0,2500;

зависимости имеют вид синусоиды, промодулированной по амплитуде другой синусоидой с периодом  $3,1447 \text{ с}^{-1}$ .

Рис. 12.4, *а* и 12.4, *б* совпадают с рис. 12.3, *а* и 12.3, *б* и никаких новых закономерностей не выявляют. Рис. 12.4, *б* на длине периода содержит два лепестка, рис. 12.4, *в* — три лепестка, рис. 12.4, *г* — четыре,

а рис. 12.4,  $\delta$  — пять лепестков, то есть здесь, подобно случаю, изображенному на рис. 12.3, при увеличении расстояния между барьерами, то есть при увеличении полной длины неоднородности  $L_S$  первоначальная зависимость  $R(\omega)$  разбивается на одинаковые лепестки, количество которых на длине первоначального периода равно отношению полной длины неоднородности к длине одного барьера:  $L_S/L_P$ .

Внутри каждого периода лепестки располагаются симметрично относительно центра периода, а их амплитуда по мере приближения к краям периода убывает. При нечетном отношении  $L_S/L_P$  период содержит один центральный лепесток, амплитуда которого значительно превышает амплитуды остальных. При четном отношении  $L_S/L_P$  в центре периода коэффициент отражения равен нулю, а по бокам симметрично располагаются два лепестка, амплитуда которых значительно превышает над остальными.

Таким образом, можно сделать вывод, что в рассматриваемом случае величина периода определяется длиной одного барьера  $L_P$ , а количество лепестков внутри периода определяется отношением полной длины неоднородности  $L_S$  к длине одного барьера:  $L_S/L_P$ . Поскольку в данном случае минимальная длина барьера  $L_P$  равна длине элементарного барьера  $L_E$ , величина  $L_S/L_P$  эквивалентна величине  $L_S/L_E$ .

### 12.4.2. Изменение длины барьеров

Рассмотрим теперь, что происходит с коэффициентом отражения в случае двух барьеров при изменении их длины. Характер поведения частотной зависимости коэффициента отражения  $R(\omega)$  при изменении длины каждого из двух барьеров иллюстрируется рис. 12.5. Зависимости нормированы на единицу (множители — в подписи). Для единства с предыдущими случаями скорости волны внутри и вне барьеров выбраны равными:  $v_1 = 1,001 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $v_0 = 1,000 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Частоты  $3,1447 \text{ с}^{-1}$  и  $6,2896 \text{ с}^{-1}$ , соответствующие  $\lambda = 2 \text{ см}$  и  $\lambda = 1 \text{ см}$ , отмечены вертикальными точечными линиями.

Из рис. 12.5 видно, что зависимость коэффициента отражения от частоты при любом расстоянии между барьерами является периодической, причем величина периода всегда остается равной  $3,1447 \text{ с}^{-1}$ , в данном случае определяемой уже не минимальной длиной барьера  $L_P$ , поскольку она меняется, а толщиной одного слоя или длиной элементарного барьера  $L_E$ , равной 1 см.

Характер зависимости  $R(\omega)$  во всех случаях имеет многолепестковый вид, напоминающий синусоиду с переменной амплитудой. Внутри каждого периода лепестки располагаются симметрично относительно центра периода. Полное количество лепестков на длине периода равно отношению полной длины неоднородности к длине элементарного барьера  $L_S/L_E$ .

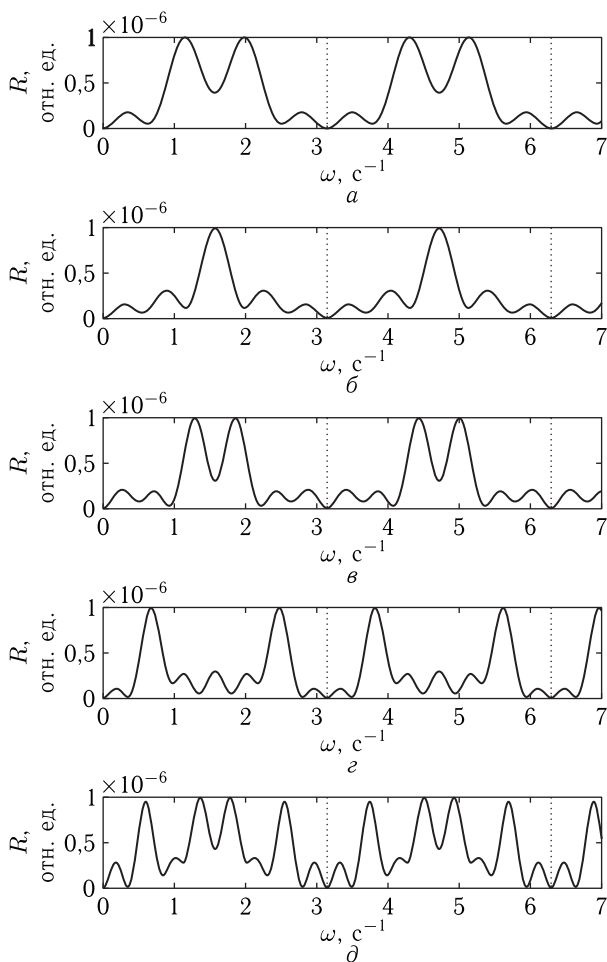


Рис. 12.5. Зависимости коэффициента отражения от частоты для случая двух барьеров различной длины. Скорости:  $v_0 = 1,000 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $v_1 = 1,001 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Параметры с нормирующим множителем:  $a - X_{1-2}, X_{3-5}$ ; 0101100000...0;  $L_S = 4 \text{ см}$ ,  $L_P = 1 \text{ см}$ ; 0,3891;  $б - X_{1-2}, X_{3-6}$ ; 0101110000...0;  $L_S = 5 \text{ см}$ ,  $L_P = 1 \text{ см}$ ; 0,2500;  $в - X_{1-2}, X_{3-7}$ ; 0101111000...0;  $L_S = 6 \text{ см}$ ,  $L_P = 1 \text{ см}$ ; 0,2994;  $г - X_{1-3}, X_{5-8}$ ; 0110011100...0;  $L_S = 7 \text{ см}$ ,  $L_P = 2 \text{ см}$ ; 0,2865;  $д - X_{1-4}, X_{5-9}$ ; 0111011110...0;  $L_S = 8 \text{ см}$ ,  $L_P = 3 \text{ см}$ ; 0,4255.

## 12.5. Произвольное количество и длина барьеров

Для многослойной структуры, все слои которой имеют одинаковую толщину, а скорость волны принимает всего два значения: одно вне барьеров, другое внутри них, отмеченные выше закономерности вы-

полняются при любом произвольном количестве, длине и расстоянии между барьерами. Перечислим эти закономерности в кратком виде.

Зависимость коэффициента отражения от частоты является периодической. Величина периода соответствует частоте  $\omega_P$ , при которой половина длины волны, равняется длине элементарного барьера  $L_E$  (рис. 12.1): так что  $\omega_P = \pi v_1 / L_E$ . Зависимость  $R(\omega)$  имеет многолепестковый вид, напоминающий синусоиду с переменной амплитудой. Внутри каждого периода лепестки располагаются симметрично относительно центра периода. Полное количество лепестков на длине периода равно отношению полной длины неоднородности к длине элементарного барьера  $L_S / L_E$ .

## 12.6. Периодическая неоднородность из единичных барьеров

Важным частным случаем барьерной неоднородности является периодическая, при которой многослойная структура представляет собой совокупность слоев одинаковой толщины с чередующимися параметрами, то есть периодическую последовательность одинаковых барьеров.

Для характеристики периодической структуры введем еще один параметр — длину периода структуры  $P_S$ , то есть такое расстояние по оси  $Ox$ , по прохождении которого свойства структуры повторяются.

### 12.6.1. Малое количество барьеров

Рассмотрим сначала, как ведет себя коэффициент отражения при различном количестве барьеров. Характер поведения частотной зависимости коэффициента отражения  $R(\omega)$  при изменении количества барьеров иллюстрируется рис. 12.6. Все зависимости нормированы на единицу (множители — в подписи к рисунку). Для единства с предыдущими случаями скорости волны внутри и вне барьеров выбрана равными:  $v_1 = 1,001 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $v_0 = 1,000 \text{ см} \cdot \text{А}^{-1}$ . Частоты  $3,1447 \text{ с}^{-1}$  и  $6,2896 \text{ с}^{-1}$ , соответствующие  $\lambda = 2 \text{ см}$  и  $\lambda = 1 \text{ см}$ , отмечены вертикальными точечными линиями.

Рис. 12.6, *а* соответствует одному барьеру и совпадает с рис. 12.2, *а*. Рис. 12.6, *б* соответствует двум барьерам, рис. 12.6, *в* — трем, рис. 12.6, *г* — четырем, рис. 12.6, *д* — пяти.

Из рис. 12.6 видно, что зависимость коэффициента отражения от частоты имеет те же свойства, что и при произвольной структуре, то есть при любом количестве барьеров является периодической с периодом  $3,1447 \text{ с}^{-1}$ , определяемой длиной элементарного барьера  $L_E = 1 \text{ см}$ . При этом зависимость  $R(\omega)$  во всех случаях имеет многолепестковый вид, причем внутри каждого периода лепестки располагаются симметрично относительно его центра. Количество лепестков на длине периода равно  $L_S / L_E$ .

Везде значительно выделяется центральный лепесток, приходящий на середину периода, причем с увеличением количества барьеров



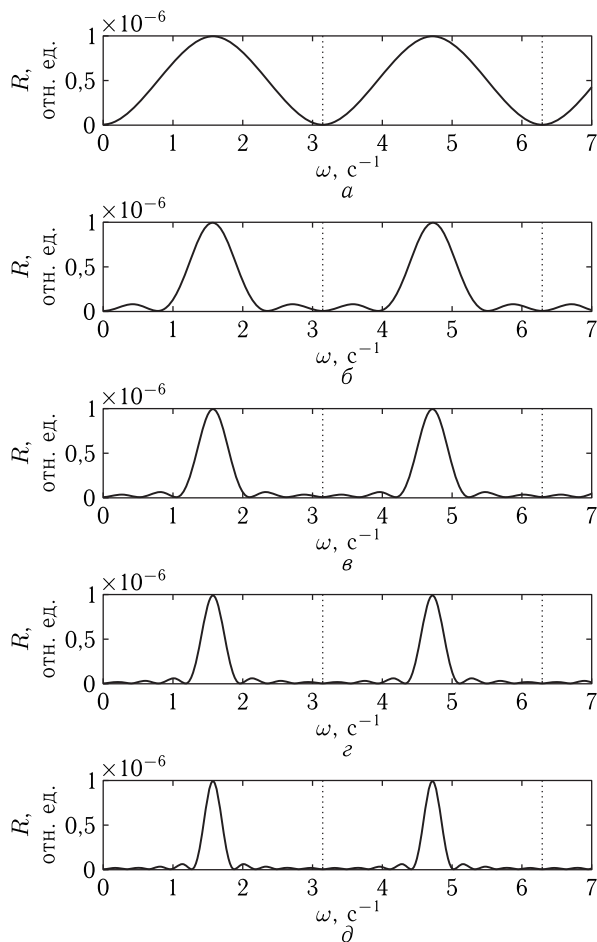


Рис. 12.6. Зависимости коэффициента отражения от частоты для периодической структуры с разным числом барьеров. Параметры:  $v_0 = 1,000 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $v_1 = 1,001 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $L_P = 1 \text{ см}$ ;  $L_E = 1 \text{ см}$ ;  $P_S = 2 \text{ см}$ .  $a - 1$ ; 0100000000...0;  $L_S = 1 \text{ см}$ ; 1,0000;  $б - 2$ ; 0101000000...0;  $L_S = 3 \text{ см}$ ; 0,2500;  $в - 3$ ; 0101010000...0;  $L_S = 5 \text{ см}$ ; 0,1111;  $г - 4$ ; 0101010100...0;  $L_S = 7 \text{ см}$ ; 0,0625;  $д - 5$ ; 0101010101...0;  $L_S = 9 \text{ см}$ ; 0,0400.

отношение амплитуды первого бокового лепестка к амплитуде центрального уменьшается. Так при двух барьерах это отношение составляет 0,0759, при трех — 0,0633, а при четырех-пяти — около 0,0506. Ширина центрального лепестка на уровне половины высоты при увеличении числа барьеров уменьшается. При одном барьере она составляет  $1,5968 \text{ с}^{-1}$ , при двух —  $0,7258 \text{ с}^{-1}$ , при трех —  $0,4677 \text{ с}^{-1}$ , при четырех —  $0,3548 \text{ с}^{-1}$  и при пяти —  $0,2903 \text{ с}^{-1}$ .

### 12.6.2. Большое количество барьеров

Ввиду практической важности распространения волны через периодическую структуру, рассмотрим этот вопрос более подробно, для чего зададим сразу достаточно большое число барьеров, чтобы основные особенности выявились более наглядно.

#### Частотные параметры

Ситуация с большим числом барьеров иллюстрируется рис. 12.7, где показаны зависимости частотных параметров главного лепестка от

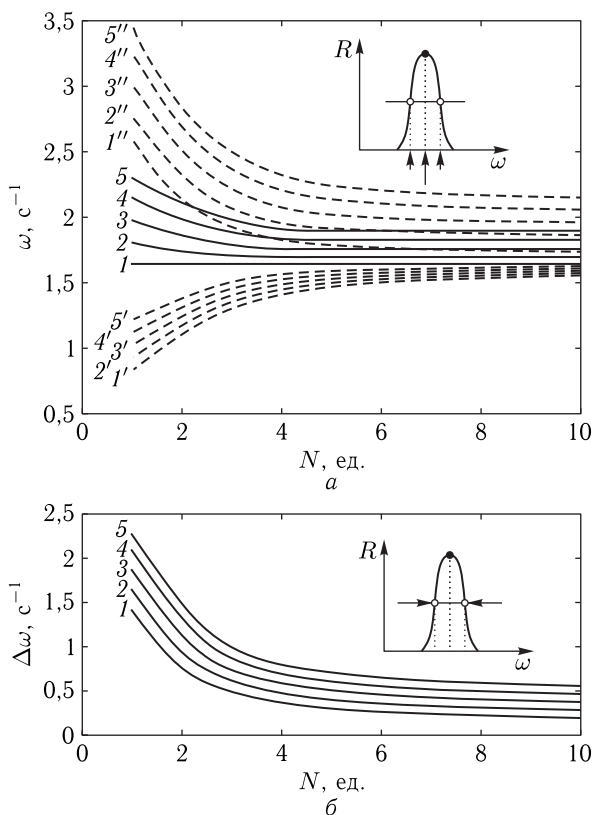


Рис. 12.7. Зависимости частотных параметров главного лепестка от количества барьеров  $N$  при различных соотношениях скоростей волн вне и внутри барьеров:  $a$  — центральная частота (сплошные линии) и частоты краев (пунктир) лепестка;  $b$  — ширина лепестка на половине его высоты. На врезках показаны схемы получения значений частот. Общие параметры:  $v_0 = 1,0 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $L_P = 1 \text{ см}$ ;  $L_E = 1 \text{ см}$ ;  $P_S = 2 \text{ см}$ . Индивидуальные параметры:  $1 - v_1 = 1,1 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $2 - v_1 = 1,2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $3 - v_1 = 1,3 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $4 - v_1 = 1,4 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $5 - v_1 = 1,5 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$

количества барьеров при различных соотношениях скоростей волн вне и внутри барьеров.

Порядок расположения барьеров при различном их числе принят следующим:  $N = 1$ : 0100000000...0000;  $N = 2$ : 0101000000...0000; далее барьеры прибавляются по одному через каждый промежуток; при десяти барьерах порядок имеет вид:  $N = 10$ : 010101010101010101.

Из рис. 12.7, *а* видно, что по мере увеличения числа барьеров центральная частота лепестка (сплошные линии) несколько уменьшается, причем это уменьшение тем более заметно, чем различие скоростей внутри и вне барьеров больше. Так, при соотношении скоростей равном 1,1 (сплошная кривая 1) центральная частота в пределах точности рисунка не меняется, тогда как при соотношении равном 1,5 (сплошная кривая 5), частота центра лепестка при одном барьере составляет  $2,32 \text{ с}^{-1}$ , а при десяти барьерах —  $1,64 \text{ с}^{-1}$ , то есть уменьшается на 29% от первоначальной величины.

Частота нижнего края лепестка на половине его высоты (цифры с одним штрихом) по мере увеличения числа барьеров увеличивается, а верхнего (цифры с двумя штрихами) уменьшается. Такое изменение также происходит наиболее сильно при числе барьеров до четырех, где составляет до 30%, а уже после шести барьеров вплоть до десяти меняется мало — не более чем на 4%.

На рис. 12.7, *б* показана зависимость ширины лепестка от числа барьеров, полученная как разность частот верхнего и нижнего краев на рис. 12.7, *а*. Видно, что при увеличении числа барьеров лепесток сужается, особенно сильно при малом их числе, причем это сужение более ярко проявляется при большем соотношении скоростей волн внутри и вне барьеров (наиболее сильно для кривой 5, где это соотношение равно 1,5). Так при увеличении числа барьеров от одного до четырех для кривой 5 сужение лепестка составляет 61%, а при увеличении числа барьеров от шести до десяти — всего 12% от начальной величины.

### **Амплитудные параметры**

Рассмотрим теперь зависимости амплитуды главного лепестка от количества барьеров  $N$  при различных соотношениях скоростей волн вне и внутри барьеров, иллюстрируемые рис. 12.8.

Из этого рисунка видно, что амплитуда главного лепестка при увеличении числа барьеров растет тем сильнее, чем соотношение скоростей волн внутри и вне барьеров больше. Так, при соотношении равном 1,1 (кривая 1), амплитуда главного лепестка достигает величины  $R = 0,5$  только при десяти барьерах, тогда как при соотношении 1,5 (кривая 5), достигает почти той же величины (точнее  $R = 0,45$ ) уже при двух барьерах. Все кривые стремятся к максимуму отражения  $R = 1,0$ , приближаясь к этому значению тем скорее, чем количество барьеров и соотношение скоростей больше. Так при соотно-

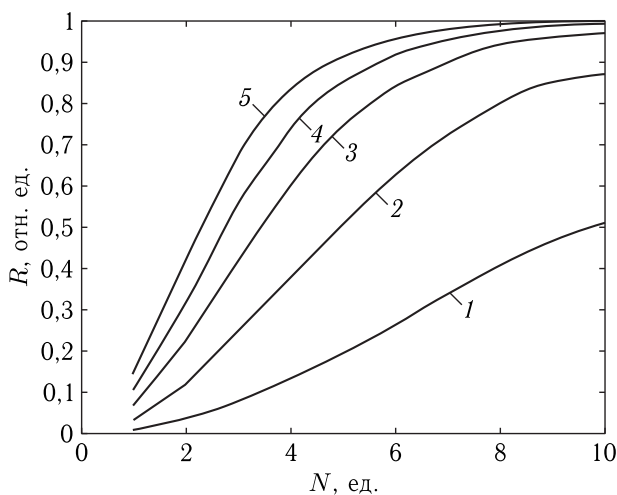


Рис. 12.8. Зависимости амплитуды главного лепестка коэффициента отражения от количества барьеров  $N$  при различных соотношениях скоростей волн вне и внутри барьеров. Все параметры — те же, что на рис. 12.7

шении скоростей равном 1,5 (кривая 5) практически полное отражение  $R = 0,990$  наступает уже при восьми барьерах, а при десяти становится равным  $R = 0,999$ .

Таким образом, можно видеть, что при увеличении числа барьеров центральная частота главного лепестка частотной зависимости коэффициента отражения несколько увеличивается, его ширина уменьшается, а амплитуда увеличивается в значительной степени, стремясь к единице, причем эти изменения происходят тем сильнее, чем соотношение скоростей внутри и вне барьера больше.

### **Влияние диссипации среды**

В предыдущих разделах рассматривалось распространение волны в многобарьерной среде, полностью бездиссипативной. Рассмотрим теперь, как меняется отражение и прохождение волны в среде с затуханием, которое будем учитывать введением в волновое число мнимой добавки, в результате чего это число будет комплексным.

Для этого обратимся к рис. 12.9, где показаны зависимости коэффициентов отражения (1), прохождения (2) и поглощения (3) от частоты для структуры с девятью барьерами. Рис. 12.9, *а* соответствует действительному волновому числу, рис. 12.9, *б* — комплексному.

Из рис. 12.9 видно, что главные особенности частотных зависимостей коэффициентов  $R$ ,  $T$ ,  $A$ , отмеченные при рассмотрении рис. 12.2, сохраняются, однако имеется ряд отличий, на которых здесь и остановимся.

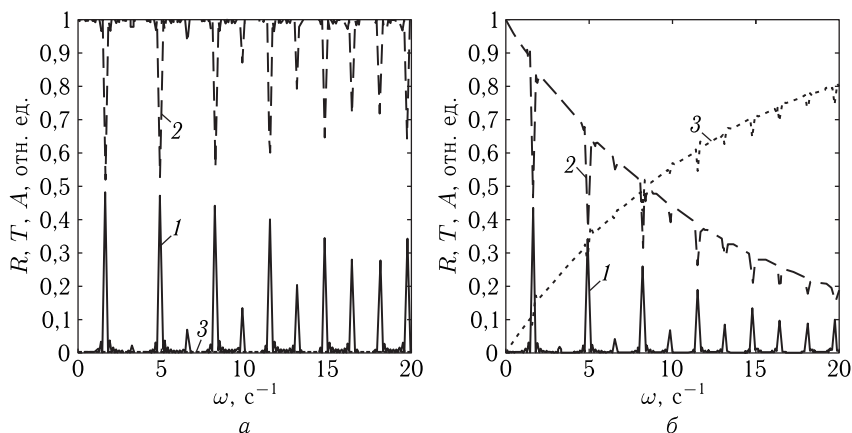


Рис. 12.9. Зависимости коэффициентов отражения (1), прохождения (2) и поглощения (3) от частоты для структуры с девятью барьерами при комплексном волновом числе. Параметры:  $v_0 = 1,00 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $v_1 = 1,10 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $L_P = 1 \text{ см}$ ;  $L_E = 1 \text{ см}$ ;  $L_S = 17 \text{ см}$ ;  $P_S = 2 \text{ см}$ ; 010101010101010100. а —  $k_0 = \omega/v_0 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_1 = \omega/v_1 \cdot (1,000 - i \cdot 0,000) \text{ см}^{-1}$ ; б —  $k_0 = \omega/v_0 \text{ см}^{-1}$ ,  $k_1 = \omega/v_1 \cdot (1,000 - i \cdot 0,005) \text{ см}^{-1}$

Из рис. 12.9, а и 12.9, б видно, что при достаточно большом числе барьеров периодичность всех зависимостей  $R(\omega)$ ,  $T(\omega)$  и  $A(\omega)$  по частоте сохраняется. Величина периода равна  $T_\omega = 2,8560 \text{ с}^{-1}$ , что полностью соответствует скорости  $v_1 = 1,10 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Однако амплитуда пиков упомянутых зависимостей меняется. Так кроме пиков при  $T_\omega \cdot (2n - 1)$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , появляются также пики при  $T_\omega \cdot 2n$ , причем из рис. 12.9, а видно, что амплитуда первых пиков с увеличением частоты спадает, а вторых — увеличивается. Вблизи  $\omega = 17 \text{ с}^{-1}$  амплитуды обоих пиков становятся равными друг другу, после чего амплитуда первых пиков растет, а вторых — уменьшается (за правой рамкой рисунка). Ширина тех и других пиков остается постоянной.

При приобретении волновым числом мнимой добавки, как видно из рис. 12.9, б, эта картина в основном сохраняется, причем величина коэффициентов отражения  $R$  и прохождения  $T$  уменьшается, а коэффициента поглощения  $A$  увеличивается, подобно тому, как это происходит на рис. 12.2, б. Отметим, что здесь при примерно такой же тенденции изменения этих коэффициентов, мнимая часть волнового числа составляет всего  $0,005 \text{ см}^{-1}$ , что соответствует  $0,55\%$  от действительной части, тогда как на рис. 12.2, б мнимая часть равна  $10\%$  от действительной. Такое различие обусловлено тем, что структура на рис. 12.2, б содержит всего один барьер, тогда как здесь их — девять, в результате чего эффект затухания волны, обусловленный мнимой частью волнового числа, здесь накапливается.

## 12.7. Вторичная модуляция коэффициентов отражения и прохождения

Поскольку амплитуда пиков зависимостей коэффициентов от частоты, представленных на рис. 12.9, меняется, представляет интерес рассмотреть их изменение в более широком диапазоне частот. Так, в работе [94] показано, что даже в отсутствие диссипации для рассматриваемой структуры частотный спектр коэффициента отражения имеет существенно дискретный характер, представляющий собой совокупность эквидистантно расположенных пиков меняющейся амплитуды.

### 12.7.1. Зависимости коэффициентов от частоты

Характер такого изменения иллюстрируется рис. 12.10, где показаны зависимости коэффициентов отражения и прохождения от частоты

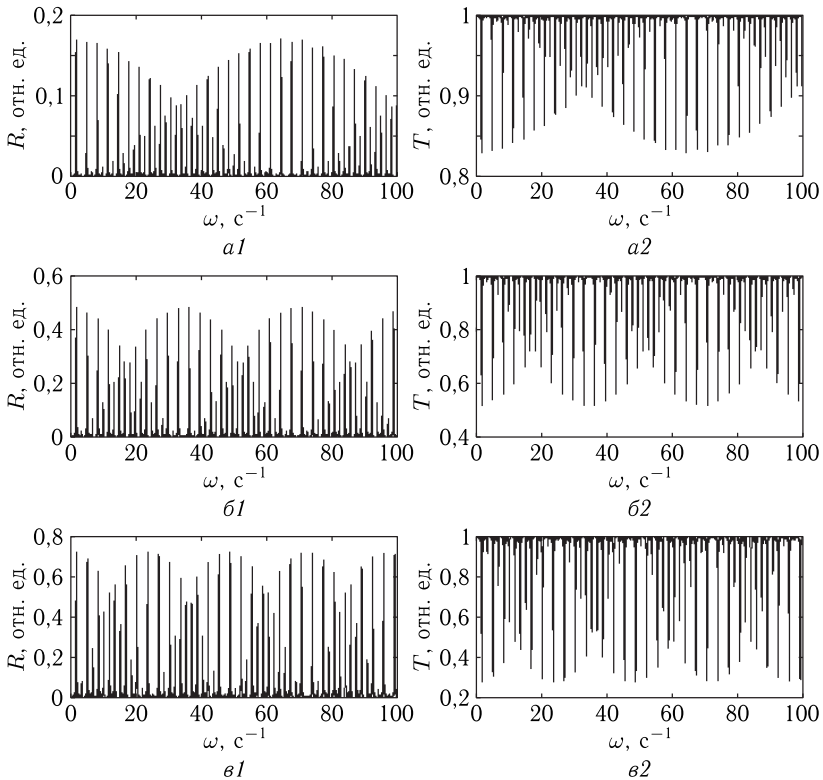


Рис. 12.10. Зависимость коэффициентов отражения ( $a1$ ,  $б1$ ,  $в1$ ) и прохождения ( $a2$ ,  $б2$ ,  $в2$ ) от частоты при различных значениях скорости волны внутри барьера. Структура — 01010101010100. Протяженности барьеров и промежутков равны 0,5 см. Скорость вне барьера:  $v_0 = 1,000$  см  $\cdot$  с<sup>-1</sup>, внутри барьера:  $a - v_1 = 1,05$  см  $\cdot$  с<sup>-1</sup>;  $б - v_1 = 1,10$  см  $\cdot$  с<sup>-1</sup>;  $в - v_1 = 1,15$  см  $\cdot$  с<sup>-1</sup>.

распространяющейся волны. Во всех случаях, показанных на рисунке, геометрические размеры барьеров остаются одинаковыми. Скорости волн вне барьеров одинаковы и равны  $v_0$ , а внутри барьеров также одинаковы и равны  $v_1$ . Напомним, что изменение скорости при неизменной частоте соответствует изменению волнового числа или длины волны, причем согласно условиям задачи такое изменение во всех барьерах происходит синхронным образом.

Рассматриваемые здесь и далее коэффициенты отражения и прохождения являются энергетическими, то есть соответствующими квадратам модулей отношений амплитуд отраженной и проходящей волн к амплитуде падающей (12.14)–(12.15), а их сумма в отсутствие затухания равна единице (согласно соотношению (12.16) при  $A = 0$ ).

Отметим сначала, что в пределах диапазона исследованных значений  $v_1$ , абсолютные значения максимумов коэффициента отражения  $R$  при сохранении  $v_0$  и увеличении  $v_1$  увеличиваются:  $a1 = 0,171$ ,  $b1 = 0,482$ ,  $v1 = 0,723$ . Абсолютные значения минимумов коэффициента прохождения  $T$  имеют величину, дополняющую коэффициент отражения до единицы:  $a2 = 0,829$ ,  $b2 = 0,518$ ,  $v2 = 0,277$ , так что выполняется соотношение (12.16) при  $A = 0$ . Можно полагать, что такое поведение коэффициентов  $R$  и  $T$  обусловлено повышением степени неоднородности структуры из-за увеличения разности скоростей волны в соседствующих участках.

Далее, из рис. 12.10 видно, что зависимости коэффициентов от частоты имеют двухпериодический характер. При этом непосредственно следующие друг за другом пики, как бы «первичные», чередуются с малым периодом  $T_e = 1,5152 \text{ с}^{-1}$ , причем этот период от соотношения скоростей внутри и вне барьера не зависит.

Эти пики имеют плавные огибающие, как бы «вторичные». Такие огибающие образованы тем, что амплитуда первичных пиков меняется через один, то есть четные пики имеют одну вторичную огибающую, а нечетные другую, причем обе эти огибающие имеют синусоидальный характер с одинаковым периодом  $T_s$  и находятся в противофазе относительно друг друга. В работах [92, 94] такое поведение пиков названо «вторичной модуляцией».

Период вторичных огибающих значительно превышает период первичных пиков, то есть  $T_s \gg T_e$ . Этот период сильно зависит от соотношения скоростей внутри и вне барьера и для рис. 12.10, *а* составляет  $132 \text{ с}^{-1}$ , для рис. 12.10, *б* —  $70 \text{ с}^{-1}$ , для рис. 12.10, *в* —  $50 \text{ с}^{-1}$ . Таким образом, период вторичной модуляции при увеличении скорости волны внутри барьера уменьшается.

### 12.7.2. Изменение соотношения скоростей

Рассмотрим влияние соотношения скоростей волн внутри и вне барьера на параметры вторичной модуляции более подробно, для чего обратимся к рис. 12.11, где показаны зависимости коэффициентов от

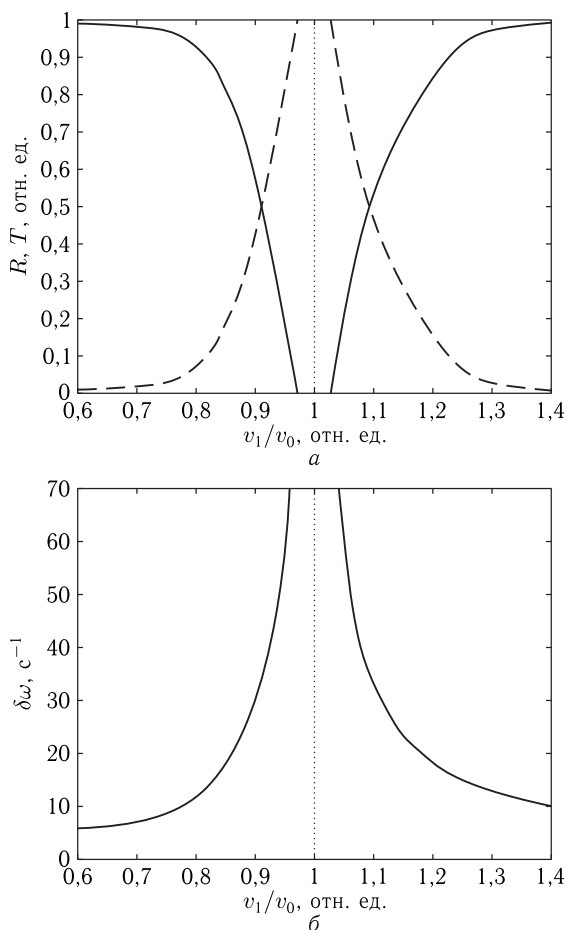


Рис. 12.11. Зависимости коэффициентов отражения и прохождения (а), а также периода вторичной модуляции (б) от соотношения скоростей волн внутри и вне барьера. Параметры — те же, что на рис. 12.10

ражения и прохождения (а), а также периода вторичной модуляции (б) от упомянутого соотношения.

Из рис. 12.11, а видно, что вблизи равенства скоростей  $v_1/v_0 = 1$  коэффициент отражения падает до нуля, а коэффициент прохождения возрастает до единицы. Очевидно, этот случай соответствует приближению к однородности структуры. При удалении от точки  $v_1/v_0 = 1$  в обе стороны коэффициент отражения растет, а прохождения уменьшается, что является следствием возрастания неоднородности структуры.

Период вторичной модуляции по частоте  $\delta\omega$  вблизи равенства скоростей  $v_1/v_0 = 1$  стремится к бесконечности, то есть в однородной



структуре вторичная модуляция отсутствует. При удалении же от этой точки в обе стороны период уменьшается тем сильнее, чем удаление больше.

### 12.7.3. Изменение протяженностей промежутков

В предыдущем разделе протяженности как барьеров, так и промежутков полагались равными. Рассмотрим теперь характер вторичной модуляции при нарушении такого равенства, для чего обратимся к рис. 12.12, где показаны зависимости коэффициентов отражения ( $a1$ ,  $b1$ ) и прохождения ( $a2$ ,  $b2$ ,  $v2$ ) от частоты в случае, когда длины промежутков и барьеров различны.

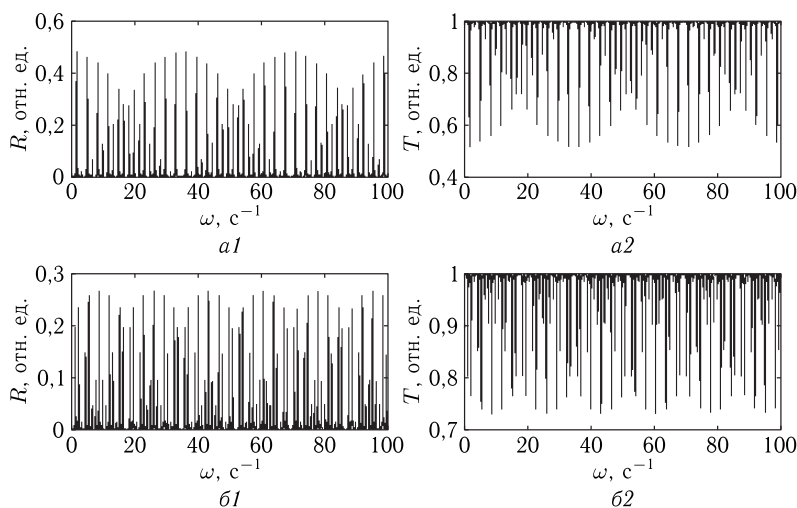


Рис. 12.12. Зависимость коэффициентов отражения ( $a1$ ,  $b1$ ) и прохождения ( $a2$ ,  $b2$ ,  $v2$ ) от частоты при различных соотношениях протяженности барьеров и промежутков. Структура — 0100100100100100. Протяженности барьеров равны 0,5 см, протяженности промежутков — 1,0 см. Скорость вне барьера:  $v_0 = 1,000 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ , внутри барьера:  $v_1 = 1,10 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$

Рис. 12.12,  $a1$ ,  $a2$  повторяет рис. 12.10,  $b1$ ,  $b2$  и приведен здесь для сравнения. Рис.12.12 $b1, b2$  соответствуют двукратному превышению длины промежутка над длиной барьера.

Прежде всего отметим, что сумма коэффициентов отражения и прохождения остается равной единице, то есть соотношение (12.16) при  $A = 0$  выполняется.

Далее можно видеть, что при увеличении длины промежутков период первичных пиков не изменился, однако период вторичных огибающих уменьшился: на рис. 12.12,  $a1$ ,  $a2$  он составляет  $70 \text{ с}^{-1}$ , а на рис. 12.12,  $b1$ ,  $b2$  — около  $50 \text{ с}^{-1}$ .

Более того, при равенстве длин барьеров и промежутков (рис. 12.12,  $a1, a1$ ) наблюдаются всего две вторичные огибающие,

тогда как при длине промежутков вдвое больше длины барьеров (рис. 12.12, б1, б2) вторичных огибающих становится уже три. Между первичными пиками большой амплитуды при равенстве длин барьеров и промежутков помещается всего один малый пик, тогда как при двукратном соотношении этих длин между большими пиками помещается уже два малых.

Таким образом, изменение соотношения длин барьеров и промежутков в сторону отклонения от их равенства приводит к сгущению частотного спектра коэффициентов отражения и прохождения.

#### 12.7.4. Влияние диссипации на вторичную модуляцию

Рассмотрим теперь ту же ситуацию несколько подробнее, в первую очередь при наличии затухания волны, которое учтем путем введения мнимой добавки к волновому числу, подобно (12.20), для чего обратимся к рис. 12.13, где показаны зависимости коэффициентов

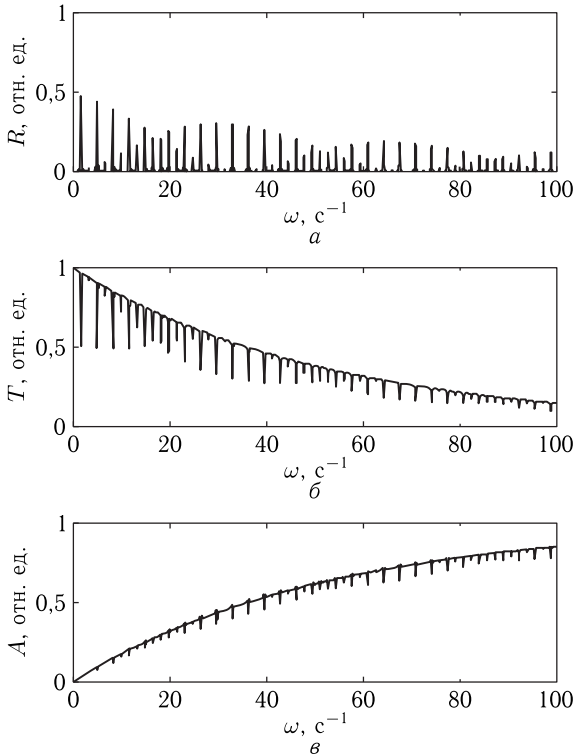


Рис. 12.13. Зависимости коэффициентов отражения (а), прохождения (б) и поглощения (в) от частоты при наличии затухания. Структура — та же, что на рис. 12.7. Скорость вне барьеров:  $v_0 = 1,0 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Скорость внутри барьеров:  $v_1 = 1,1 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Остальные параметры — те же, что на рис. 12.10

отражения  $R$  (а), прохождения  $T$  (б) и поглощения  $A$  (в) от частоты  $\omega$  при наличии затухания, задаваемого мнимой частью волнового числа, вне барьеров:  $k_0 = \omega/v_0 \cdot (1,0000 - i \cdot 0,0005) \text{ см}^{-1}$ , внутри:  $k_1 = \omega/v_1 \times (1,0000 - i \cdot 0,0005) \text{ см}^{-1}$ .

Из рис. 12.13, а видно, что огибающая зависимости коэффициента отражения  $R$  от частоты по мере ее увеличения плавно спадает с осцилляциями синусоидального характера.

Коэффициент прохождения  $T$  (рис. 12.13, б) также плавно спадает, однако теперь осцилляции проявляются только на его нижней огибающей, тогда как верхняя спадает монотонно.

Коэффициент поглощения  $A$  (рис. 12.13, в) по мере роста частоты увеличивается без каких-либо осцилляций, однако на частотах, соответствующих максимумам отражения и минимумам прохождения, претерпевает небольшие выбросы, составляющие не более 10% от текущей величины. Амплитуда этих выбросов также осциллирует, однако ввиду малости осцилляций, эффект вторичной модуляции здесь проявляется значительно слабее, чем на коэффициентах отражения и прохождения.

### 12.7.5. Возможный механизм вторичной модуляции

В работах [92, 94, 99] отмечено, что возможной причиной вторичной модуляции являются биения между частотами, соответствующими резонансам волны на длине барьеров и промежутков.

В случае равенства таких длин получаются всего две резонансные частоты, определяемые скоростями волны внутри и вне барьеров. При этом точки перепада скоростей от одного значения к другому распределены на длине структуры равномерно, то есть период их расположения равен длине одного барьера или одного промежутка.

При различии длин барьера и промежутка точки перепада скоростей по длине структуры группируются попарно, то есть период их расположения становится равным сумме длин барьера и промежутка.

Таким образом, в качестве характерного размера, кроме длин барьера и промежутка, может выступить еще и их суммарная длина, что создает условия для третьей характерной резонансной частоты. Можно полагать, что включение в работу третьей частоты и является причиной появления третьей вторичной синусоиды на рис. 12.12, б1, б2.

Другими словами, барьеры и промежутки между ними представляют собой ограниченные с двух сторон участки однородной среды, то есть обладают определенными резонансными свойствами. Поскольку имеются только два вида таких участков, то и резонансных частот получается всего две. Таким образом, волна распространяется через цепочку распределенных резонаторов, частоты которых чередуются. Такое распространение приводит к биению между этими частотами, в результате чего появляется разностная частота с периодом, значительно большим, чем исходные. Этот период и проявляет себя в периодическом изменении амплитуды пиков, то есть вторичной модуляции частотной зависимости коэффициента отражения. При увеличении раз-

ности между частотами составляющих структуру резонаторов (то есть между значениями скоростей в них) частота биений увеличивается, в результате чего период вторичной модуляции уменьшается, как это и видно из рис. 12.10.

Заметим однако, что приведенное здесь рассуждение является не более чем качественным, то есть требует более серьезного количественного рассмотрения, что авторы осмеливаются предложить выполнить любознательному читателю в качестве полезного упражнения.

## 12.8. Обобщение на случай электромагнитных волн

Проведенное рассмотрение выполнено на примере одномерной волны как наиболее простой, однако не представляет труда обобщить предложенный способ расчета на случай волн другой природы, в частности электромагнитных, например как это сделано в работах [57, 74], а также в главе 10 (раздел 10.16). Так, для случая нормального падения волны достаточно во всех выражениях, кроме показателей экспонент, заменить волновые числа величинами, обратными соответствующим импедансам:

$$k_n \rightarrow 1/Z_n, \quad (12.21)$$

где

$$Z_n = Z_0 \sqrt{\mu_n/\varepsilon_n}, \quad (12.22)$$

$Z_0$  — импеданс пустого пространства, а  $\mu_n$  и  $\varepsilon_n$  — магнитная и диэлектрическая проницаемости  $n$ -го слоя.

В случае наклонного падения сначала надо найти углы падения волн обоих направлений во всех слоях структуры. Эти углы в крайних слоях структуры считаются заданными:  $\theta_1$  и  $\theta_N$ . Остальные углы  $\theta_n$  между направлением распространения волны в слое  $n$  и осью  $Ox$  определяются законом Снеллиуса. Для волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , начиная с  $k_1$  и  $\theta_1$ , увеличивая индекс на единицу, последовательно получаем:

$$\cos \theta_n = \frac{\sqrt{k_n^2 - k_{n-1}^2 + k_{n-1}^2 \cos^2 \theta_{n-1}}}{k_n}. \quad (12.23)$$

Для волн, распространяющихся в отрицательном направлении оси  $Ox$ , начиная с  $k_N$  и  $\theta_N$ , уменьшая индекс на единицу, последовательно получаем:

$$\cos \theta_{n-1} = \frac{\sqrt{k_{n-1}^2 - k_n^2 + k_n^2 \cos^2 \theta_n}}{k_{n-1}}. \quad (12.24)$$

После того как все углы  $\theta_n$  найдены, в случае волн с продольной поляризацией для волновых чисел надо произвести замену:

$$k_n \rightarrow 1/Z_n \cos \theta_n, \quad (12.25)$$

при этом экспоненты преобразуются как

$$\exp[-ik_n(x_n - x_{n-1})] \rightarrow \exp[-ik_n \cos \theta_n(x_n - x_{n-1})], \quad (12.26)$$

а амплитуды определяются выражениями

$$A_n \rightarrow A_n \cos \theta_n; \quad B_n \rightarrow B_n \cos \theta_n. \quad (12.27)$$

Для волн с поперечной поляризацией замена волновых чисел имеет вид

$$k_n \rightarrow \cos \theta_n / Z_n, \quad (12.28)$$

экспоненты преобразуются в соответствии с формулой (12.26), а амплитуды  $A_n$  и  $B_n$  остаются без изменений:

$$A_n \rightarrow A_n; \quad B_n \rightarrow B_n. \quad (12.29)$$

### 12.8.1. Электромагнитная волна в проводящей среде

В случае одномерной волны основной ее характеристикой, отражающей свойства среды, является волновое число. Для электромагнитной волны параметрами среды являются диэлектрическая и магнитная проницаемости  $\varepsilon$  и  $\mu$ , а также проводимость  $\sigma$ . Рассмотрим как выражаются приведенные замены переменных через эти параметры. Для простоты дальнейшей записи соответствующий номеру среды индекс « $n$ » будем опускать.

При записи уравнений электродинамики для проводящей среды ее проводимость удобно включить в диэлектрическую проницаемость в виде мнимой добавки [118, стр. 801, форм. (31.12)], [130, стр. 120, форм. (3.33)]:

$$\varepsilon = \varepsilon_r - i \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (12.30)$$

где  $\varepsilon_r$  — действительная часть волнового числа.

При этом полное волновое число приобретает вид:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu \mu_0 \left( \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)}. \quad (12.31)$$

Преобразуем эту формулу с помощью известного соотношения для извлечения квадратного корня из комплексного числа [123, стр. 19, (58.1)]:

$$\sqrt{a \pm ib} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \quad (12.32)$$

В результате, подобно (12.20), получаем:

$$k = \eta - i \cdot \xi, \quad (12.33)$$

где

$$\eta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}; \quad (12.34)$$

$$\xi = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0}{2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}. \quad (12.35)$$

Именно в таком виде волновое число надо подставлять в показатель экспоненты, входящий в формулы для  $\alpha$  (12.7). В результате для случая нормального падения волны получаем:

$$\alpha = -i \cdot \frac{1 - e^{-\xi d} e^{-i\eta d}}{1 + e^{-\xi d} e^{-i\eta d}}, \quad (12.36)$$

где  $\eta$  и  $\xi$  соответствуют выражениям (12.34) и (12.35), определяемым через параметры материала для каждой среды.

Для случаев наклонного падения с продольной и поперечной поляризациями вместо (12.36) получаем:

$$\alpha = -i \cdot \frac{1 - e^{-\xi d} e^{-i\eta d \cos \theta}}{1 + e^{-\xi d} e^{-i\eta d \cos \theta}}, \quad (12.37)$$

где угол  $\theta$  определяется для каждой среды в соответствии с законом Снеллиуса (12.23) или (12.24).

Входящие в формулы (12.1)–(12.2) амплитуды  $A_P$ ,  $B_P$  и  $A_S$ ,  $B_S$  преобразуются в соответствии с формулами (12.27) или (12.29).

Общий вид остальных функций (12.3)–(12.6), а также (12.8)–(12.11) не меняется, кроме того, что в функциях (12.4) и (12.6) производится замена волнового числа на импеданс соответствующей среды:

$$\frac{k_{n-1}}{k_n} \rightarrow \frac{Z_n}{Z_{n-1}}. \quad (12.38)$$

В среде с проводимостью импеданс становится комплексным. Так, из общего определения импеданса («характеристического волнового сопротивления среды», глава 1, форм. (1.206), (1.207)) с учетом (12.30) получаем:

$$Z = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega}}}, \quad (12.39)$$

откуда, выделяя действительную и мнимую части и пользуясь (12.32), получаем:

$$Z = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_r \left\{ 1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2 \right\}}} \cdot (\delta + i\zeta), \quad (12.40)$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}; \quad (12.41)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}. \quad (12.42)$$

Из сопоставления с (12.34)–(12.35) можно видеть, что имеют место соотношения:

$$\delta = \frac{\eta}{\omega \sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0}}; \quad (12.43)$$

$$\zeta = \frac{\xi}{\omega \sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0}}, \quad (12.44)$$

а также

$$\eta = \omega \sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0} \delta; \quad (12.45)$$

$$\xi = \omega \sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0} \zeta. \quad (12.46)$$

Приведенные соотношения позволяют обобщить все описанные результаты в применении к электромагнитным волнам, распространяющимся в среде с магнитной и диэлектрической проницаемостями, а также проводимостью.

## Выводы по главе 12

Данная глава посвящена применению метода исключения для решения задач о распространении волн через барьерные и периодические неоднородности. Получены амплитуды выходящих волн при падении на структуру волн прямого и встречного направлений. Выявлен эффект вторичной модуляции, оценено влияние диссипации.

Основные результаты, рассмотренные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрена задача о распространении волн через многослойную структуру, содержащую барьерные и периодические неоднородности. Рассмотрение проведено методом исключения. Получены частотные зависимости коэффициентов отражения, прохождения и поглощения. Показано, что при действительном волновом числе все упомянутые зависимости имеют осциллирующий периодический вид.

2. В случае комплексного волнового числа, при небольшой величине мнимой части по сравнению с действительной, с увеличением частоты амплитуда осцилляций спадает, а поглощение постепенно растет. При средней величине мнимой части осцилляции почти пропадают и поглощение начинает преобладать над отражением, а при достаточно большой величине мнимой части осцилляции пропадают полностью и отражение преобладает над поглощением.

3. При действительном волновом числе зависимость коэффициента отражения от частоты при любом количестве, длине и расстоянии между барьерами является периодической. Величина периода соответствует частоте, при которой половина длины волны на этой частоте равняется длине элементарного барьера. Зависимость коэффициента отражения от частоты имеет многолепестковый вид, напоминающий синусоиду с переменной амплитудой. Внутри каждого периода лепестки располагаются симметрично относительно центра периода. Полное количество лепестков на длине периода равно отношению полной длины неоднородности к длине элементарного барьера.

4. Рассмотрено распространение волны в структуре с периодической неоднородностью на модели многобарьерной среды. Показано, что зависимость коэффициента отражения от частоты имеет те же основные свойства, что и при произвольном сочетании барьеров. Благодаря периодичности структуры внутри каждого периода значительно выделяется центральный лепесток, приходящийся на середину периода, причем с увеличением количества барьеров ширина этого лепестка значительно уменьшается, а амплитуды боковых лепестков резко падают. При увеличении числа барьеров центральная частота главного лепестка несколько увеличивается, его ширина уменьшается, а амплитуда увеличивается, причем эти изменения происходят тем сильнее чем соотношение скоростей внутри и вне барьера больше.

5. При комплексном волновом числе с увеличением частоты коэффициенты отражения и прохождения уменьшаются, а коэффициент поглощения увеличивается. Показано, что такое изменение происходит при значительно меньшей величине мнимой части волнового числа, чем при одном барьере, что обусловлено накоплением затухания волны при прохождении многих барьеров.

6. Рассмотрен эффект вторичной модуляции, состоящий в периодическом изменении коэффициентов отражения и прохождения при изменении частоты распространяющейся волны. Исследована тонкая структура частотных спектров отражения и прохождения. Выявлена их существенная дискретность. Показано, что частотные зависимости имеют двухпериодический характер, состоящий во взаимном наложении первичного и вторичного рядов, имеющих периоды, отличающиеся в несколько раз, причем период вторичного ряда (собственно «вторичная модуляция») значительно превышает период первичного. При равенстве длин барьеров и промежутков вторичный ряд имеет вид двух наложенных друг на друга синусоид, находящихся в противофазе. Показано, что расположение линий первичного ряда от соотношения между скоростями внутри барьера и вне его не зависит, а период огибающей вторичного ряда при увеличении этого соотношения уменьшается.

7. Получены зависимости коэффициентов отражения и прохождения от соотношения скоростей волны внутри барьеров и в промежутках между ними. Показано, что в окрестности точки, соответствующей



равенству скоростей, коэффициент отражения стремится к нулю, а коэффициент прохождения — к единице, что соответствует переходу к однородной среде. В этой же точке период вторичной модуляции стремится к бесконечности.

8. Относительно спектров частотной модуляции рассмотрен случай различия между длиной барьеров и промежутков между ними. Показано, что при этом параметры первичного ряда сохраняются, тогда как вторичная огибающая приобретает вид наложения друг на друга трех синусоидальных зависимостей.

9. Для интерпретации наблюдаемых свойств вторичной модуляции предложена качественная модель структуры как многорезонаторной системы распределенного типа, характерными размерами которой являются длины барьеров, промежутков между ними, а также их суммарная длина.

10. Показана возможность и даны рекомендации для обобщения полученных результатов на случай электромагнитных волн, распространяющихся в проводящей среде с магнитной и диэлектрической проницаемостями.

## Глава 13

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИСКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ЧЕРЕЗ СТРУКТУРЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Глава посвящена применению метода исключения для решения практических задач о распространении волн в неоднородных средах, распределение неоднородностей в которых носит случайный характер. В качестве модели выбрана многослойная структура, состоящая из десяти сред, волновые числа в которых распределены случайным образом. Изучены свойства распределения плотности амплитуд отраженных волн, обусловленные соотношением между толщиной структуры и минимальной длиной волны в ней. Показано, что разупорядочение распределения волновых чисел внутри структуры ведет к уменьшению отражения и предложен параметр, количественно характеризующий такое уменьшение.

В главе частично использован материал монографии [62, стр. 78–91] и статьи [88]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 13.1. Геометрия задачи и схема метода расчета

Основной задачей настоящей главы является рассмотрение распространения волн в структуре со случайными параметрами. В качестве модели выбрана многослойная структура, схема геометрии которой совпадает с принятой в главе 10 и показанной на рис. 10.1. Не повторяя рисунка, приведем здесь лишь краткое ее описание.

В общем случае структура содержит  $N$  сред, в виде сложенных друг с другом плоских однородных бесконечно протяженных пластин. Среды разделены  $N - 1$  плоскими бесконечно тонкими границами. Плоскость  $Oyz$  декартовой системы координат  $Oxyz$  параллельна плоскостям пластин, а ось  $Ox$  им перпендикулярна. Вдоль оси  $Ox$  в обоих направлениях распространяются плоские одномерные волны с волновыми числами  $k_1, k_2, \dots, k_N$ . Амплитуды волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$ , обозначены через  $A_n$ , в отрицательном — через  $B_n$ . Амплитуды входящих в структуру волн обозначены  $A_P$  и  $B_P$ , выходящих —  $A_S$  и  $B_S$ . Явный вид этих амплитуд соответствует приведенным в главе 10 формулам (10.517)–(10.518).

Для решения задачи о распространении волн далее использован метод исключения, подробно описанный в главе 10. Для каждой среды рассматриваются две волновые функции, одна из которых является суммой встречных волн, а другая — частным от деления производной от первой на волновое число. Вся структура разбита на ячейки, каждая из которых включает в себя одну среду и одну границу. После нахождения соотношений между упомянутыми функциями на внешних сторонах каждой ячейки, полученные соотношения сшиваются простым «прикладыванием» друг к другу, в результате чего амплитуды внутренних волн взаимно исключаются. В конечном счете получается система из двух линейных уравнений, содержащая в качестве неизвестных амплитуды выходящих из структуры волн, а в качестве параметров — амплитуды входящих.

Описанный метод исключения, благодаря своей компактности обусловленной простотой записи и получения конечных формул, допускает весьма простую численную алгоритмизацию, пошаговая схема которой приведена в разделе 10.14. В таком виде метод с успехом может быть применен к самому различному виду неоднородностей. В качестве примера рассмотрим результаты расчета для структуры, состоящей из десяти слоев одинаковой толщины, волновые числа в которых принимают целые значения от  $k_1 = 1 \text{ см}^{-1}$  до  $k_{10} = 10 \text{ см}^{-1}$ , распределенные случайным образом.

### 13.2. Задание случайного характера распределения волновых чисел

В настоящей работе задание случайного характера неоднородности осуществлялось путем генерации случайных целых чисел [122, стр. 219], [136, стр. 638–640] от 1 до 10 с помощью процедуры, имитирующей извлечение предметов из урны с последующим возвращением [136, стр. 639, пример 1]. Генерация последовательности целых значений волновых чисел в интервале от  $k_1 = 1 \text{ см}^{-1}$  до  $k_{10} = 10 \text{ см}^{-1}$  осуществлялась с помощью механического генератора [136, стр. 638]. Десять однородных предметов, пронумерованных от 1 до 10, помещались в урну. Единичное испытание состояло в извлечении первого попавшегося предмета и регистрации его числового значения, после чего предмет возвращался в урну и урна интенсивно встряхивалась.

Можно было полагать, что в результате таких испытаний распределение волновых чисел, принимающих целые значения в интервале от  $1 \text{ см}^{-1}$  до  $10 \text{ см}^{-1}$ , будет равномерным, то есть все значения волнового числа из этого интервала будут равновероятными. Для проверки такого положения было осуществлено 240 испытаний, в ходе которых проводился подсчет числа выпадений каждого номера. Полученные результаты сведены в таблицу 13.1. В первом столбце приведено значение волнового числа, во втором — количество выпадений этого волнового

Таблица 13.1. Нормированное число выпадений каждого номера

$k$	$n$	$n_k$
1	29	0,1218
2	18	0,0750
3	28	0,1167
4	28	0,1167
5	21	0,0875
6	23	0,0958
7	29	0,1218
8	23	0,0958
9	17	0,0708
10	24	0,1000

числа, в третьем — количество выпадений, нормированное на полное число испытаний, то есть полученная частота выпадения данного волнового числа.

Среднее арифметическое значение волнового числа получилось равным  $5,3492 \text{ см}^{-1}$ , что близко к точному значению  $5,5000 \text{ см}^{-1}$ , среднее арифметическое количества выпадений:  $M_k = 24,0000$ , дисперсия этого количества:  $\sigma_{Mk} = 4,2190$ , коэффициент асимметричности:  $S_k = -0,2796$ .

Среднее арифметическое количества нормированных выпадений:  $m_k = 0,1000$ , дисперсия  $\sigma_k = 0,0176$ , коэффициент асимметричности  $S_k = -0,2796$ . Заметим, что коэффициент асимметричности как в нормированном, так и в ненормированном случаях получается одинаковым.

Приведенные в таблице 13.1 результаты иллюстрируются рис. 13.1, где в виде ступенчатой функции показана зависимость нормированного количества выпадений заданных значений волнового числа от самих этих значений.

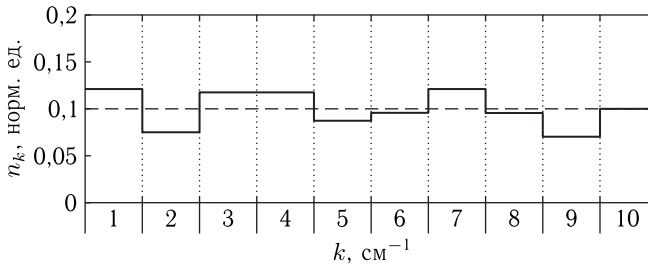


Рис. 13.1. Зависимость нормированного количества выпадений от значения волнового числа

По горизонтальной оси отложены значения волновых чисел, по вертикальной — значения частот выпадения данного волнового числа. Горизонтальная пунктирная линия соответствует среднему арифметическому значению.

Из рисунка видно, что зависимость на всем ее протяжении отклоняется от среднего значения в обе стороны в одинаковой степени, причем отклонения значений  $n_k$  от среднего сравнительно невелики.

Учитывая величину дисперсии по отношению к среднему арифметическому, можно полагать, что получаемые в такой последовательности волновые числа являются равновероятными с точностью около 20% (точнее 17,58%).

### 13.3. Отражение волны от двухслойной структуры

Рассмотрим сначала в качестве опорного случай, когда волновое число в пределах структуры принимает всего два значения, что как бы соответствует ее двухслойному строению.

Для получения случайного характера набора параметров полученная выше последовательность из 240 случайных чисел была сведена в таблицу 13.2, содержащую 8 столбцов по 30 строк.

На основе этой таблицы были сформированы пары по два числа, для чего таблица проходила сначала по столбцам и затем по строкам, при этом в качестве пар брались два друг за другом следовавших волновых числа. Таким образом было сформировано 240 пар, которые использовались для расчета модуля нормированной амплитуды отраженной волны в соответствии с формулой для двухслойной структуры:

$$|B_S| = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|, \quad (13.1)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — первое и второе значения волновых чисел из данной пары. Учитывая, что  $1 \text{ см}^{-1} \leq k \leq 10 \text{ см}^{-1}$ , получаем область существования величины  $B_S$  в виде

$$0 \leq |B_S| \leq 0,8182. \quad (13.2)$$

Диапазон наблюдаемых значений амплитуды отраженной волны от 0 до 1 был разбит на интервалы (разряды) по 0,1, после чего подсчитывалось количество значений  $|B_S|$ , приходящихся на каждый интервал. Полученные результаты иллюстрируются рис. 13.2, где в виде гистограммы показана зависимость нормированного количества значений  $|B_S|$ , приходящихся на один интервал, от границ этого интервала. По горизонтальной оси отложены границы интервалов, по вертикальной — нормированные количества значений  $|B_S|$  приходящихся на данный интервал. Горизонтальная пунктирная линия соответствует среднему арифметическому наблюдаемых значений  $|B_S|$ . Среднее арифметическое  $|B_S|$  равно 0,1000, дисперсия равна 0,0494, коэффициент асимметричности:  $-0,2589$ .

Таблица 13.2. Случайные числа в интервале от 1 до 10

3	9	3	7	1	10	2	5
1	4	2	5	7	1	8	4
3	9	2	4	4	1	2	1
4	6	7	9	6	8	5	6
9	10	9	3	6	1	9	5
10	8	1	3	1	9	6	8
7	3	1	8	1	4	6	1
2	1	9	2	7	8	6	7
10	7	5	2	7	3	6	9
4	3	1	4	5	5	10	7
4	4	8	6	8	3	3	10
10	6	7	4	6	5	1	2
3	6	7	1	5	3	3	1
3	8	5	10	10	6	3	4
2	7	6	5	1	4	3	3
6	8	3	4	1	7	5	9
5	4	2	10	7	1	3	9
6	7	9	4	3	3	4	2
8	9	1	7	8	10	10	4
10	5	6	8	3	1	10	10
7	6	1	10	6	7	3	1
9	7	3	1	4	2	7	5
5	7	2	1	1	7	5	8
1	10	7	8	10	4	7	3
4	4	8	1	5	4	8	2
7	5	6	9	4	2	9	2
8	2	6	4	10	10	10	9
10	3	5	8	4	7	8	2
8	1	6	3	7	10	4	7
3	8	10	5	8	6	7	4

Из рисунка видно, что зависимость  $n_B$  от  $|B_S|$  в интервалах 0,1–0,2, 0,2–0,3 и 0,3–0,4 имеет ярко выраженный подъем с максимальным отклонением от среднего значения до 0,075, что в полтора раза превышает величину дисперсии. Небольшой провал при 0,3–0,4 значительно меньше величины дисперсии, то есть находится в пределах статистической ошибки. Главный максимум приходится на интервал 0,1–0,2 и составляет 0,1750, что превышает среднее значение более чем в полтора раза (то есть на 75%). В соседнем с ним интервале 0,2–0,3 значение  $n_A$  также велико и составляет 0,1667, то есть превышает

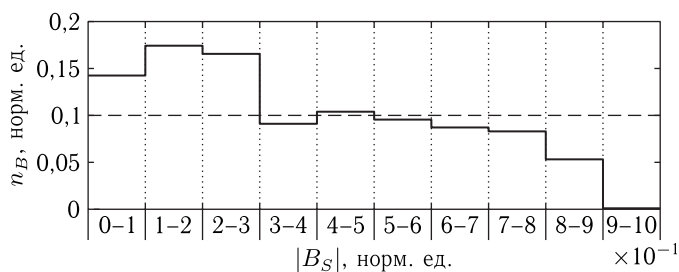


Рис. 13.2. Зависимость нормированного количества значений  $|B_S|$ , приходящихся на один интервал, от границ этого интервала

среднее значение на 67%. Резкий провал в интервале 0,9–1,0 соответствует требованию  $|B_S| \leq 0,8182$ .

Таким образом, функция вида (13.1), будучи примененной к равномерно распределенным случайным числам  $k_1$  и  $k_2$ , порождает в интервале от 0,1 до 0,3 максимум вероятности своего распределения, значительно превышающий среднее значение.

## 13.4. Отражение волны от многослойной структуры различной длины

Для задания параметров многослойной структуры использовался набор из десяти последовательных значений целых волновых чисел от  $1 \text{ см}^{-1}$  до  $10 \text{ см}^{-1}$ , которые переставлялись в случайном порядке, что обеспечивалось тем же генератором, имитировавшим извлечение предметов из урны, однако, в отличие от предыдущего случая, без их возвращения. Использовалось 40 сформированных таким образом наборов из десяти различающихся между собой значений волновых чисел.

### 13.4.1. Плотность распределения амплитуды

Как и в предыдущем случае, диапазон значений амплитуды отраженной волны  $|B_S|$  от 0 до 1 был разбит на интервалы по 0,1. Исследовалась зависимость нормированной плотности распределения  $|B_S|$  от полной длины структуры  $L$ , которая варьировалась от нуля до половины минимальной длины волны, определяемой максимальным значением волнового числа  $k = 10 \text{ см}^{-1}$  и составлявшей 0,3142 см (то есть до максимального значения, допускающего ступенчатое приближение (раздел 9.5.1, форм. (9.19)).

Полученные зависимости в виде гистограмм для трех разных значений  $L$  показаны на рис. 13.3. Горизонтальная пунктирная линия соответствует среднему арифметическому значению  $n_A$ , равному 0,1000.

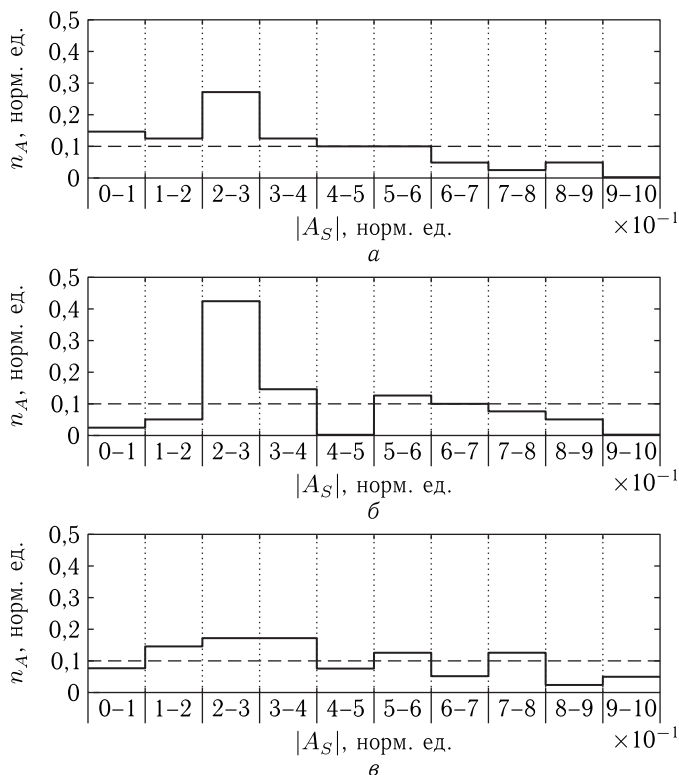


Рис. 13.3. Распределение величины  $n_A$  по разрядам при различных значениях полной длины структуры. *a* —  $L = 0,01$  см; *б* —  $L = 0,15$  см; *в* —  $L = 0,30$  см

Из рисунка видно, что распределение во всех случаях имеет подъем в области 0,1–0,4 значений  $|B_S|$ , что, как и для двухслойной структуры определяется соотношением волновых чисел в крайних слоях.

Однако, в отличие двухслойной структуры, здесь этот подъем при  $L = 0,15$  см выражен значительно сильнее (рис. 13.3, *б*), менее выражен при  $L = 0,01$  см (рис. 13.3, *а*) и почти не отличается от случая двухслойной структуры при  $L = 0,30$  см (рис. 13.3, *в*).

Правая по рисунку часть распределения в области больше 0,5 от длины структуры практически не зависит. Однако следует отметить, что при  $L = 0,30$  см в интервале 0,9–1,0 наблюдается хотя и малое (0,05), но все же отличное от нуля значение  $n_A$ , что говорит о том, что при столь большой длине структуры в формировании отражения роль внутреннего распределения волновых чисел начинает преобладать над ролью крайних слоев.

Более точный характер зависимости плотности распределения  $|B_S|$  от длины структуры  $L$  иллюстрируется рис. 13.4, где показана



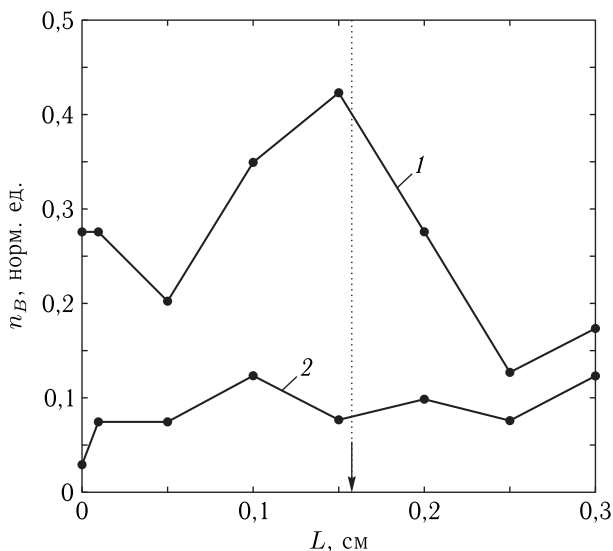


Рис. 13.4. Зависимость плотности распределения  $|A_S|$  от длины структуры  $L$ :  
 1 — интервал 0,2–0,3; 2 — интервал 0,7–0,8

зависимость  $n_B$  от  $L$  в интервалах 0,2–0,3 (кривая 1) и 0,7–0,8 (кривая 2). На рисунке точки — результат машинного эксперимента из 40 распределений волновых чисел. Линии — соединяющие точки отрезки прямых.

Из рисунка видно, кривая 1 везде проходит выше кривой 2, что соответствует спаду зависимости  $n_A$  от  $|B_S|$ , обусловленному ролью крайних слоев структуры. Кривая 1 вблизи  $L = 0,1571$  см имеет резко выраженный максимум, тогда как кривая 2 такого максимума не имеет. Этот максимум говорит о том, что при любых распределениях волновых чисел отражение от структуры становится максимальным тогда, когда ее длина приближается к четверти минимальной длины волны в структуре  $\lambda/4 = 0,1571$  см (соответствующей  $k = 10$  см<sup>-1</sup>), значение которой показано стрелкой и вертикальной точечной линией.

**Замечание.** Такой максимум отражения аналогичен известному в оптике свойству максимального отражения от находящейся в воздухе стеклянной пластинки толщиной в четверть длины волны, где набег фазы при распространении волны внутри пластинки, определяемый разностью хода при двукратном прохождении, составляет  $180^\circ$ , да еще столько же добавляет отражение от внутренней поверхности пластинки за счет меньшей плотности внешней среды, в результате чего полный набег получается равным  $360^\circ$  и отраженная от начальной поверхности волна складывается с вышедшей из пластинки после прохождения всей ее толщины, давая двойную амплитуду.

Однако разница состоит в том, что в оптике рассматривается пластинка полностью однородная, то есть в ней по всей ее толщине волна распространяется с одной и той же скоростью. Здесь же структура является неоднородной, причем слой, соответствующий четверти минимальной длины волны, составляет по длине всего 0,1 от полной длины структуры, а вся остальная ее часть состоит из слоев, длина волны в которых превышает минимальную и меняется в случайном порядке.

### 13.4.2. Амплитуда отраженной волны

Исследование показывает, что не только плотность распределения, но и амплитуда отраженной волны зависит от полной длины структуры, причем тем сильнее, чем длина структуры больше.

В таблице 13.3 показаны амплитуды отраженной волны  $|B_S|$  при некоторых случайных распределениях волновых чисел, выбранных из 40 независимых измерений таким образом, чтобы величины  $|B_S|$  были распределены по всему диапазону своего существования более или менее равномерно.

Т а б л и ц а 13.3. Амплитуды отраженной волны при некоторых распределениях волновых чисел

$Q$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$	$ B_S $
1	10	2	1	3	4	6	7	9	5	8	0,1111
2	4	3	10	1	9	5	6	2	7	8	0,3333
3	2	9	1	7	10	5	4	8	3	6	0,5000
4	10	1	3	6	5	7	9	4	8	2	0,6667
5	1	7	8	3	10	5	2	4	6	9	0,8000

В левом столбце таблицы приведены условные номера распределений, в следующих десяти столбцах — волновые числа по слоям (в  $\text{см}^{-1}$ ), в последнем столбце — значения  $|B_S|$ , определенные из соотношения волновых чисел крайних слоев по формуле (13.1).

На рис. 13.5 показаны зависимости амплитуды отраженной волны  $|B_S|$  от полной длины структуры  $L$  при распределениях волновых чисел по слоям, приведенных в таблице 13.3.

Из рисунка видно, что при  $L \rightarrow 0$  все зависимости сходятся к значениям, полностью определяемым волновыми числами в крайних слоях структуры. При увеличении полной длины структуры  $L$  амплитуда отраженной волны может как возрастать, так и убывать, причем склонность к возрастанию или убыванию определяется не конкретным распределением волновых чисел, а соотношением волновых чисел в крайних слоях структуры.

По этому признаку вся ось при  $L \rightarrow 0$  делится на непрерывные области, относительно которых зависимости  $|B_S|$  от  $L$  возрастают или убывают, причем эти области чередуются друг с другом. Области возрастания показаны штриховкой, исходящие из них зависимости 1

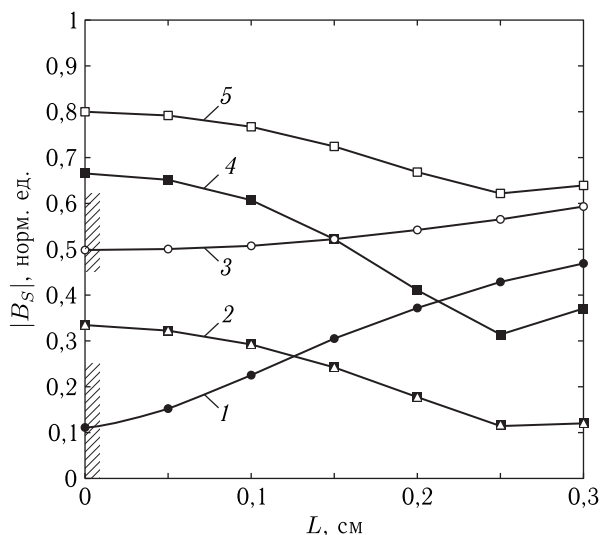


Рис. 13.5. Зависимости нормированной амплитуды отраженной волны от полной длины структуры при различных распределениях волновых чисел по слоям. Номера кривых соответствуют номерам распределений волновых чисел в таблице 13.3. Точки — результаты машинного эксперимента. Линии — соединяющие их отрезки прямых

и 3 возрастают. Области без штриховки соответствуют убыванию, исходящие из них зависимости 2, 4, 5 убывают. Однако это убывание продолжается только до  $L = 0,25$  см, после чего все кривые приобретают склонность к возрастанию.

### 13.5. Отражение при изменении характера случайности внутренних слоев структуры

Рассмотрим структуру, состоящую из конечного числа слоев одинаковой толщины, причем волновые числа в слоях представляют собой дискретный ряд последовательных равноотстоящих друг от друга значений. Пусть в крайних слоях структуры волновые числа принимают наименьшее и наибольшее значения, а волновые числа во внутренних слоях распределены произвольным образом.

Из качественных соображений можно было бы ожидать, что минимум отражения наступает тогда, когда изменение волнового числа в соседних слоях минимально, то есть при линейном монотонном распределении волнового числа от наименьшего значения к наибольшему.

Однако это не так. Численный расчет показывает, что при фиксированных волновых числах в крайних слоях внесение случайности

во внутренние слои по сравнению с линейным распределением приводит к уменьшению отражения.

В рассматриваемом случае для описания степени изменения отражения такие традиционные характеристики как среднее арифметическое, дисперсия и моменты высших порядков не пригодны, так как при любой перестановке фиксированного числа слоев в силу их равновероятности эти характеристики остаются прежними, тогда как отражение изменяется.

Возьмем за основу линейное изменение волнового числа и введем в рассмотрение степень разупорядоченности распределения волновых чисел в слоях  $\delta_S$  как отклонение от этого линейного изменения:

$$\delta_S = \frac{\sum_{n=1}^N |k_n - k_{0n}|}{N}, \quad (13.3)$$

где  $N$  — полное число слоев,  $k_n$  — волновое число в слое с номером  $n$ ,  $k_{0n}$  — волновое число в слое с номером  $n$  при линейном распределении, то есть

$$k_{0n} = k_1 + \frac{k_N - k_1}{N - 1}(n - 1), \quad (13.4)$$

где  $k_1$  и  $k_N$  — волновые числа в первом и последнем слоях структуры. Число  $\delta_S$  будем называть «параметром разупорядоченности».

При таком определении степень разупорядоченности при линейном распределении равна нулю, то есть система полностью упорядочена и разупорядоченность отсутствует, а при любом другом распределении принимает положительные значения.

Приведем числовой пример структуры из десяти слоев, волновые числа в которых принимают значения от  $1 \text{ см}^{-1}$  до  $10 \text{ см}^{-1}$  с шагом в  $1 \text{ см}^{-1}$ . Пусть полная длина структуры равна  $L = 0,15 \text{ см}$ . Рассматривались 20 различных случайным образом сформированных распределений волновых чисел в слоях, которые для удобства сравнения были пронумерованы от 1 до 20 в порядке возрастания величины  $|B_S|$ . В таблице 13.4 в качестве примера показаны некоторые такие распределения, а также соответствующие им амплитуды отражения  $|B_S|$  и параметры разупорядочения  $\delta_S$ . В нижней строке таблицы приведены те же величины при линейном распределении.

Таблица 13.4. Примеры случайных распределений волновых чисел

$Q$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$	$ B_S $	$\delta_S$
1	1	8	7	9	6	2	4	5	3	10	0,7206	3,2
10	1	2	8	9	6	4	7	3	5	10	0,7466	2,2
20	1	2	5	3	7	8	4	9	6	10	0,7831	1,4
Лин.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0,7985	0,0

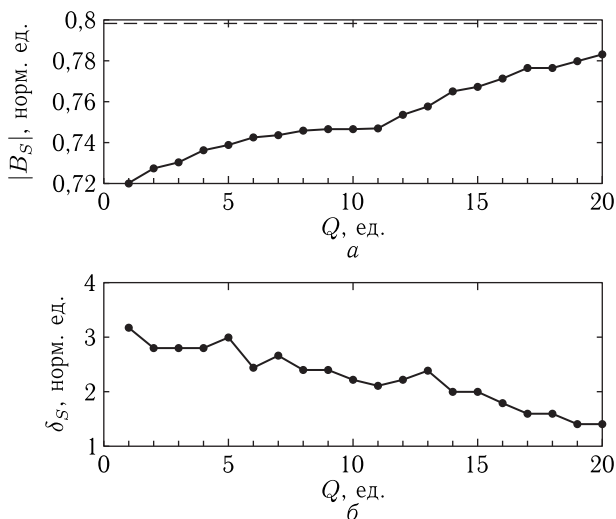


Рис. 13.6. Модуль амплитуды отраженной волны  $|B_S|$  (а) и параметра разупорядоченности  $\delta_S$  (б) при различных распределениях  $Q$  волновых чисел. Горизонтальная пунктирная линия на верхнем рисунке соответствует линейному распределению. Точки — результаты машинного эксперимента, линии — соединяющие их отрезки прямых.  $L = 0,15$  см,  $N = 10$ ,  $k_1 = 1$  см $^{-1}$ ,  $k_{10} = 10$  см $^{-1}$ ,  $\Delta k = 1$  см $^{-1}$

На рис. 13.6 приведены зависимости модуля амплитуды отраженной волны  $|B_S|$  (а) и параметра разупорядоченности  $\delta_S$  (б) от номера распределения  $Q$  волновых чисел во внутренних слоях.

Из рисунка видно, что амплитуда отраженной волны  $|B_S|$  при уменьшении разупорядочения  $\delta_S$  увеличивается, причем обе зависимости в пределах рисунка близки к линейным. Контрольный расчет показывает, что при дальнейшем уменьшении величины  $\delta_S$  по линейному закону рост величины  $|B_S|$  замедляется, приближаясь к 0,7985 при  $\delta_S \rightarrow 0$  (нижняя строка таблицы 13.4).

**Замечание.** Заметим, однако, что нарушение линейного упорядочения путем перестановки волновых чисел в двух соседних слоях для пар слоев, одинаково отстоящих от разных краев структуры, не является эквивалентным. Так перестановка волновых чисел  $k_2$  и  $k_3$  при сохранении упорядоченности остальных дает  $|B_S| = 0,7981$ , а подобная перестановка  $k_8$  и  $k_9$  приводит к  $|B_S| = 0,7974$ . Видно, что в первом случае значение  $|B_S|$  меньше отличается от максимума 0,7985, чем во втором, тогда как в обоих этих случаях параметры разупорядоченности совпадают и равны  $\delta_S = 0,2$ . Такое обстоятельство говорит о целесообразности учета более тонкой структуры распределения, чем та, которая определяется только параметром  $\delta_S$ , то есть этот параметр при всем своем удобстве дает лишь первое приближение степени упорядоченности.

### 13.6. Некоторые заключительные замечания

В настоящей главе рассмотрено применение метода исключения для исследования распространения волн через структуру со случайными неоднородностями. Главной задачей здесь являлась демонстрация возможности применения метода для задачи столь сложного характера.

В то же время, авторы полагают, что поставленная задача имеет заметное самостоятельное значение. Так, рассмотренные в двух предыдущих главах структуры с регулярными, барьерными и периодическими неоднородностями являют собой лишь частные случаи структуры, неоднородности в которой распределены произвольным образом. Следует заметить, что большинство многослойных структур, встречающихся в природе и имеющих применение в технике, обладают именно нерегулярным характером. Достаточно упомянуть распределение температуры или состава воды в океане, слоистые залежи полезных ископаемых в земной толще, многослойные конструкции термо и звукоизоляции и многое другое. Таким образом, можно полагать, что задача о распространении волн в случайно неоднородной среде имеет достаточно важное значение.

Ввиду применимости метода исключения к подобным задачам, отметим некоторые моменты возможного развития представленных здесь результатов. Прежде всего заметим, что рассматривалось только отражение волн от случайной структуры. В то же время можно ожидать, что исследование прохождения также приведет к неожиданным результатам. Далее, рассматривалась только одномерная волна, что эквивалентно падению плоской волны по нормали к поверхности. В то же время, на практике зачастую используются электромагнитные волны различных поляризаций, падающие на внешнюю поверхность структуры под различными углами. То же относится к другим видам волн, например упругим или акустическим. Можно полагать, что все такие случаи также требуют рассмотрения. Рамки настоящей работы ограничены всего десятью слоями, причем использовался генератор, дающий только целые числа. Эти параметры были обусловлены требованием рассмотрения достаточно простого случая. В то же время, ступенчатое приближение плавной неоднородности может потребовать учета значительно большего числа слоев, параметры которых находятся в дробных соотношениях (например, такой структуры, как рассматривалась в разделе 9.6). То есть следующим этапом развития работы можно считать увеличение числа слоев, в том числе с использованием более совершенного генератора, максимально приближенного к практике.

Справедливости ради следует заметить, что примененный здесь метод исключения нельзя считать единственно специфическим для решения задач о случайных неоднородностях. Можно полагать, что другие последовательные методы, например импеданса или матрицы, также вполне пригодны для их решения. В этом плане важным

моментом можно считать сравнение различных методов в применении к данной задаче с целью выявления их относительных преимуществ.

По-видимому, перечисленные возможности развития решения задачи не имеют исчерпывающего характера, однако, по мнению авторов, представляют значительный простор для новых изысканий, реализацию которых авторы осмеливаются предложить любознательному читателю.

### Выводы по главе 13

Данная глава посвящена рассмотрению распространения волны в многослойной структуре со случайными параметрами. Главное внимание уделено амплитуде отраженной волны при изменении геометрических и волноведущих параметров структуры.

Основные результаты, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрено распространение волны в структуре, состоящей из десяти сред, волновые числа в которых распределены случайным образом. Приведена схема получения волновых чисел, принимающих случайные целые значения в интервале от  $1 \text{ см}^{-1}$  до  $10 \text{ см}^{-1}$ , использующая механический генератор, имитирующий извлечение предметов из урны с последующим возвращением. Показано, что получаемые с помощью такого генератора волновые числа являются равновероятными с точностью около 17%.

2. Получено 240 случайных значений волнового числа, сведенных в таблицу из 8 столбцов по 30 строк, выборка пар из которой по строкам и столбцам использована далее для анализа отражения волны от исследуемой структуры.

3. Показано, что плотность распределения амплитуд отраженных волн имеет максимум в интервале 0,1–0,3 от единицы, обусловленный свойствами функции  $(k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$ , наиболее сильно проявляющийся при толщине структуры, соответствующей четверти минимальной длины волны.

4. Обнаружено, что случайный характер распределения волновых чисел слоев проявляется тем сильнее, чем больше длина структуры приближается к своему предельно допустимому значению, равному половине минимальной длины волны. Выявлено, что при длине структуры, меньшей 0,01 от минимальной длины волны, случайный характер распределения волновых чисел слоев не сказывается, а амплитуда отраженной волны определяется соотношением волновых чисел только первой и последней сред.

5. Показано, что при фиксированных волновых числах крайних слоев структуры внесение неоднородности во внутренние слои относительно линейного распределения волновых чисел приводит к уменьшению отражения. В качестве характеристики такого уменьшения пред-

---

ложен «параметр разупорядоченности», определяемый как нормированная сумма модулей отклонения волновых числе в слоях от величин, соответствующих линейной неоднородности.

6. Приведены рекомендации для дальнейшего развития работы. В частности, указана возможность обобщения метода на другие виды волн, в первую очередь на электромагнитные и акустические. Совершенствование метода должно идти по пути увеличения числа слоев и применения генератора, допускающего дробные отношения между их параметрами. Важной задачей можно считать сравнение метода исключений в применении к случайным средам с возможностями других методов последовательных вычислений, таких как методы матрицы и импеданса.



## МЕТОД ПЕРЕОТРАЖЕНИЙ

Глава посвящена описанию метода переотражений, предназначенного для расчета амплитуд отраженных и проходящих волн в случае, когда заранее известны локальные коэффициенты отражения и прохождения для каждой пары соседствующих слоев структуры. Для структуры из трех сред получены амплитуды внешних и внутренних волн, приведена процедура расчета локальных коэффициентов при известных волновых числах слоев структуры. Рассмотрены случаи падения волн прямого и встречного направлений, выполнено сравнение с результатами, получаемыми прямым методом.

В главе частично использован материал монографии [60, стр. 86–109]. Остальные необходимые ссылки приведены в тексте.

### 14.1. Место метода переотражений в настоящем рассмотрении

Рассматриваемый в настоящей главе метод переотражений является, по-видимому, исторически первым методом, который был предложен для исследования распространения волн через слоистые структуры [3, стр. 353–359]. Метод развивался, исходя из потребностей оптики, в первую очередь для расчета параметров интерферометрических приборов, таких как интерферометров Фабри-Перо [3, стр. 359–362], Люммера-Герке [3, стр. 372–377], интерференционных фильтров [3, стр. 377–381], для получения многолучевых полос в тонких пленках, в том числе клиновидной или переменной по плоскости толщины [3, стр. 381–386], а также для исследования тонких металлических и диэлектрических пленок [3, стр. 687–693]. Во всех этих случаях слой был, по- существу, один, окруженный двумя средами (воздух или подложка пленки), то есть было всего две поверхности, распространяясь между которыми в перпендикулярном или наклонном направлении, свет испытывал многократные переотражения. Коэффициенты отражения и прохождения на каждой поверхности измерялись независимым методом и их было всего два или четыре, если поверхности отличались друг от друга. Результатом являлся коэффициент отражения или прохождения по энергии, а основным расчетным инструментом были «формулы Эйри» [3, стр. 355, форм. (9), (13)]. Основу математического

аппарата для получения этих и других подобных им формул составляло суммирование бесконечно убывающей геометрической прогрессии [122, стр. 143, форм. (4.10-2)].

Таким образом, метод переотражений прекрасно обходился знанием коэффициентов отражения и прохождения на внешних поверхностях единственного слоя, а задача о распространении волн в многослойных структурах для метода переотражений не ставилась, ибо в многослойных структурах не всегда возможно четко определить коэффициенты отражения и прохождения на границах между внутренними средами структуры.

Настоящая монография посвящена в первую очередь многослойным структурам, поэтому метод переотражений в ней занимает в некоторой степени специфическое положение. Во-первых, он достаточно интересен с идеологической стороны и имеет многочисленные приложения. Во-вторых, никто не запрещал развить метод на случай более трех сред, то есть выйти за рамки однослойных структур, рассматривавшихся в оптике. Следует признаться, что авторам не известны подобные попытки развития метода на многослойные структуры, однако в любом случае они сочли весьма полезным изложить здесь основы и достаточно простую трактовку метода, в том числе для того случая, если любознательный читатель заинтересуется и попробует здесь приложить свои силы.

## 14.2. Падение волны прямого направления

Рассмотрим общий математический аппарат метода переотражений в применении к падению волны прямого направления на один слой, окруженный двумя другими средами, в случае, когда известны локальные коэффициенты отражения и прохождения на границах между поверхностями основного слоя и окружающих его сред.

### 14.2.1. Общая геометрия задачи

Рассмотрим падение одномерной волны на один слой, заключенный между двумя границами. Геометрия задачи схематически иллюстрируется рис. 14.1.

Структура состоит из трех однородных сред  $1$ ,  $2$  и  $3$  (цифры в кругах), разделенных двумя бесконечно тонкими границами  $1$  и  $2$  (цифры в треугольниках). Задача является одномерной, то есть предполагается, что волна распространяется только вдоль оси  $Ox$ , перпендикулярной к обеим границам. Координаты границ —  $x_1$  и  $x_2$ , расстояние между ними

$$d = x_2 - x_1. \quad (14.1)$$

Волна падает на структуру слева из среды  $1$ , частично отражается в ту же среду  $1$  и частично проходит в среду  $2$ . При распространении внутри среды  $2$  волна испытывает многократные отражения от обеих границ с частичным выходом при каждом отражении в среды  $1$  или  $3$ .

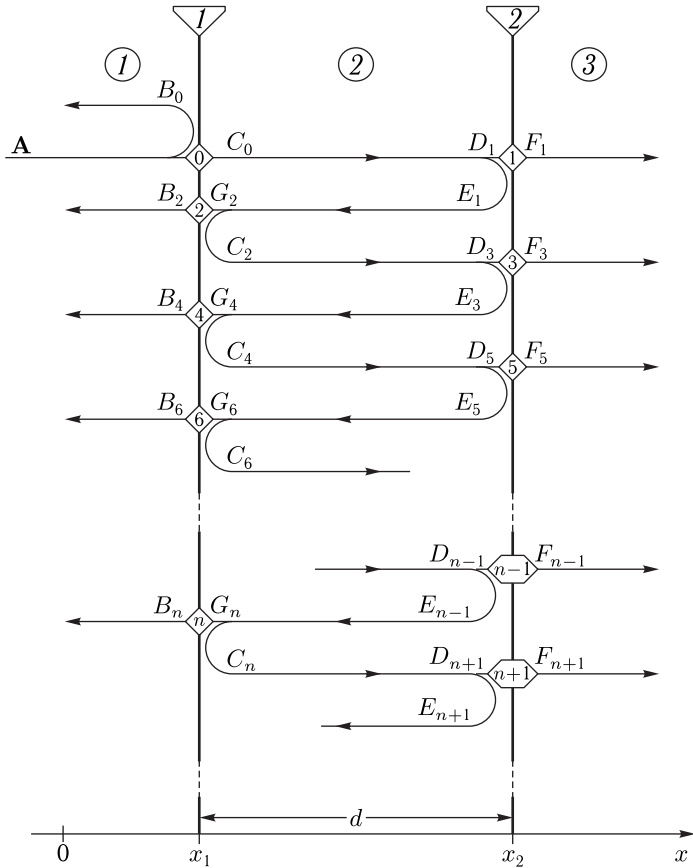


Рис. 14.1. Геометрия задачи

В результате в среде 1 формируется суммарная отраженная волна, а в среде 3 — суммарная проходящая.

На рис. 14.1 цифрами в ромбах пронумерованы последовательные во времени акты взаимодействия волны с границами. Для удобства чертежа траектории волны при отражении показаны дугообразными линиями. Схематично можно считать, что смещение по рисунку вниз соответствует развитию процесса последовательных переотражений волны во времени.

Исходная волна с начальной амплитудой  $A$  падает на границу 1. Происходит акт взаимодействия волны с этой границей № 0, в результате чего от границы отходят две частичные волны: отраженная с амплитудой  $B_0$  и проходящая с амплитудой  $C_0$ .

Распространяясь от границы 1 до границы 2 проходящая волна  $C_0$  приобретает набег фазы, превращаясь вблизи границы 2 в волну  $D_1$ ,

которая при взаимодействии с границей 2 (акт взаимодействия № 1), дает две новые частичные волны: отраженную в среду 2 волну  $E_1$  и проходящую в среду 3 волну  $F_1$ . Волна  $E_1$ , подходя к границе 1, переходит в волну  $G_2$ , которая в результате акта взаимодействия № 2 дает новые частичные волны: отраженную в среду 2 волну  $C_2$  и выходящую в среду 1 волну  $B_2$ . Далее волна  $C_2$ , переходя в волну  $D_3$ , в результате акта № 3 порождает частичные волны  $E_3$  и  $F_3$  и процесс внутренних переотражений с образованием частичных волн развивается дальше по той же схеме.

Внизу на рисунке показаны акты взаимодействия  $n - 1$ ,  $n$  и  $n + 1$ , иллюстрирующие развитие процесса вплоть до бесконечности.

### 14.2.2. Представление единичной ячейки

Схему переотражений, представленную на рис. 14.1 можно представить в виде совокупности последовательно соединенных единичных ячеек, одна из которых с номером  $n$  показана на рис. 14.2.

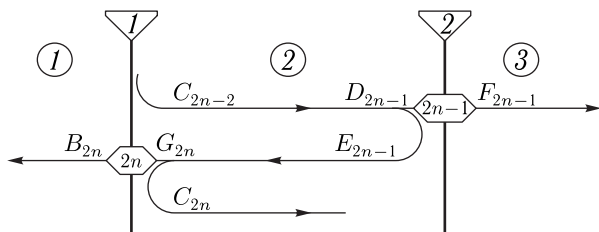


Рис. 14.2. Единичная ячейка переотражения с номером  $n$

При изменении  $n$  от 1 до  $+\infty$  осуществляется перебор всех актов взаимодействия волны с границами, в результате чего полную суммарную отраженную волну в среде 1 и суммарную проходящую волну в среде 3 можно представить в виде сумм частичных волн по  $n$ . Исключением является только акт взаимодействия № 0, который надо учесть отдельно.

Распространение волны внутри среды 2 слева направо можно представить в виде:

$$U_2 \sim \exp[i(\omega t - k_2 x)]. \quad (14.2)$$

Такая волна, проходя от границы 1 до границы 2, приобретает задержку во времени, равную  $\Delta t = d/v$ , где  $v = \omega/k_2$  — фазовая скорость волны в среде 2, то есть:  $\Delta t = k_2 d/\omega$ . Таким образом, полагая, например, что поле волны на границе 1 равно  $\exp[i\omega t]$  (так будет при  $x_1 = 0$ ), получаем поле волны на границе 2 равным:  $\exp[i\omega(t - \Delta t)] = \exp[i(\omega t - k_2 d)]$ , что эквивалентно умножению исходного поля волны на фазовый множитель  $\exp(-ik_2 d)$ . Очевидно, этот множитель от выбора начала координат никак не зависит. Волна, проходящая в обратном направлении от границы 2 к границе 1, приобретает ту же задержку во времени и тот же множитель. То есть для волны, пробегающей

между двумя границами туда и обратно, этот множитель возводится в квадрат, а в процессе многократных переотражений возводится в степень, равную числу отражений волны от той или иной границы. Для упрощения дальнейшей записи для такого множителя введем обозначение:

$$e_2 = \exp(-ik_2d), \quad (14.3)$$

где индекс «2» соответствует номеру среды.

### 14.2.3. Частичные коэффициенты отражения и прохождения

Метод переотражений предполагает, что для каждой границы в отдельности заранее известны коэффициенты отражения и прохождения по амплитуде в обоих направлениях распространения волны. В рамках данного изложения будем называть такие коэффициенты «частичными» или «локальными».

Для частичных коэффициентов введем следующие обозначения (номера и порядок индексов соответствуют номерам сред):

для коэффициентов отражения

$r_{12}$  — при падении волны из первой среды на границу со второй,

$r_{21}$  — при падении волны из второй среды на границу с первой,

$r_{23}$  — при падении волны из второй среды на границу с третьей;

для коэффициентов прохождения

$t_{12}$  — при прохождении из первой среды во вторую,

$t_{21}$  — при прохождении из второй среды в первую,

$t_{23}$  — при прохождении из второй среды в третью.

Эти коэффициенты могут быть выражены через параметры сред из решения прямым методом задачи для двух сред, разделенных одной границей.

### 14.2.4. Амплитуды частичных волн

Рассмотрим амплитуды волн для ячеек с последовательными номерами, для чего, следуя рис. 14.2, выразим амплитуды волн в ячейке с номером  $n$  через амплитуду входящей в нее волны  $C_{2n-2}$ . Для простоты сначала рассмотрим частные случаи  $n = 1$  и  $n = 2$ .

При  $n = 1$  получаем:

входящая в ячейку 1 внутри среды 2

$$C_0; \quad (14.4)$$

распространяющаяся внутри среды 2 в прямом направлении

$$D_1 = C_0 e_2; \quad (14.5)$$

распространяющаяся внутри среды 2 в обратном направлении

$$E_1 = D_1 r_{23} = C_0 e_2 r_{23}; \quad (14.6)$$

выходящая на проход в среду 3

$$F_1 = D_1 t_{23} = C_0 e_2 t_{23}; \quad (14.7)$$

распространяющаяся внутри среды 2 в обратном направлении

$$G_2 = E_1 e_2 = C_0 e_2^2 r_{23}; \quad (14.8)$$

переходящая в ячейку 2 внутри среды 2

$$C_2 = G_2 r_{21} = C_0 e_2^2 r_{21} r_{23}; \quad (14.9)$$

выходящая на отражение в среду 1

$$B_2 = G_2 t_{21} = C_0 e_2^2 r_{23} t_{21}. \quad (14.10)$$

При  $n = 2$  получаем:

входящая в ячейку 2 внутри среды 2

$$C_2; \quad (14.11)$$

распространяющаяся внутри среды 2 в прямом направлении

$$D_3 = C_2 e_2; \quad (14.12)$$

распространяющаяся внутри среды 2 в обратном направлении

$$E_3 = D_3 r_{23} = C_2 e_2 r_{23}; \quad (14.13)$$

выходящая на проход в среду 3

$$F_3 = D_3 t_{23} = C_2 e_2 t_{23}; \quad (14.14)$$

распространяющаяся внутри среды 2 в обратном направлении

$$G_4 = E_3 e_2 = C_2 e_2^2 r_{23}; \quad (14.15)$$

переходящая в ячейку 2 внутри среды 2

$$C_4 = G_4 r_{21} = C_2 e_2^2 r_{21} r_{23}; \quad (14.16)$$

выходящая на отражение в среду 1

$$B_4 = G_4 t_{21} = C_2 e_2^2 r_{23} t_{21}. \quad (14.17)$$

Аналогично при произвольном  $n$  (рис. 14.2) получаем:  
входящая в ячейку  $n$  внутри среды 2

$$C_{2n-2}; \quad (14.18)$$

распространяющаяся внутри среды 2 в прямом направлении

$$D_{2n-1} = C_{2n-2} e_2; \quad (14.19)$$

распространяющаяся внутри среды 2 в обратном направлении

$$E_{2n-1} = D_{2n-1} r_{23} = C_{2n-2} e_2 r_{23}; \quad (14.20)$$

выходящая на проход в среду 3

$$F_{2n-1} = D_{2n-1} t_{23} = C_{2n-2} e_2 t_{23}; \quad (14.21)$$

распространяющаяся внутри среды 2 в обратном направлении

$$G_{2n} = E_{2n-1}e_2 = C_{2n-2}e_2^2r_{23}; \quad (14.22)$$

переходящая в ячейку  $2n + 1$  внутри среды 2

$$C_{2n} = G_{2n}r_{21} = C_{2n-2}e_2^2r_{21}r_{23}; \quad (14.23)$$

выходящая на отражение в среду 1

$$B_{2n} = G_{2n}t_{21} = C_{2n-2}e_2^2r_{23}t_{21}. \quad (14.24)$$

#### 14.2.5. Амплитуды внешних волн

Суммарная амплитуда волны, отраженной от среды 2, равна сумме всех волн  $B_{2n}$  от  $n = 1$  до  $+\infty$ , а также волны  $B_0$ , отраженной от границы 1 при падении на нее исходной волны  $A$  (акт взаимодействия № 0, учитываемый отдельно):

$$U_B = B_0 + B_2 + B_4 + \dots + B_{2n} + \dots, \quad (14.25)$$

где

$$B_0 = Ar_{12}; \quad (14.26)$$

$$B_2 = C_0e_2^2r_{23}t_{21}; \quad (14.27)$$

$$B_4 = C_2e_2^2r_{23}t_{21}; \quad (14.28)$$

.....

$$B_{2n} = C_{2n-2}e_2^2r_{23}t_{21}; \quad (14.29)$$

.....

В этих выражениях:

$$C_0 = At_{12}; \quad (14.30)$$

$$C_2 = C_0e_2^2r_{21}r_{23} = At_{12}(e_2^2r_{21}r_{23})^1; \quad (14.31)$$

$$C_4 = C_2e_2^2r_{21}r_{23} = At_{12}(e_2^2r_{21}r_{23})^2; \quad (14.32)$$

.....

$$C_{2n-2} = C_{2n-4}e_2^2r_{21}r_{23} = At_{12}(e_2^2r_{21}r_{23})^{n-1}; \quad (14.33)$$

.....

Подставляя (14.12)–(14.15) в (14.8)–(14.11), получаем:

$$B_0 = Ar_{12}; \quad (14.34)$$

$$B_2 = A(e_2^2r_{23}t_{12}t_{21})(e_2^2r_{21}r_{23})^0; \quad (14.35)$$

$$B_4 = A(e_2^2r_{23}t_{12}t_{21})(e_2^2r_{21}r_{23})^1; \quad (14.36)$$

$$B_6 = A(e_2^2r_{23}t_{12}t_{21})(e_2^2r_{21}r_{23})^2; \quad (14.37)$$

.....

$$B_{2n} = A(e_2^2r_{23}t_{12}t_{21})(e_2^2r_{21}r_{23})^{n-1}; \quad (14.38)$$

.....





$$F_5 = A(e_2 t_{12} t_{23})(e_2^2 r_{21} r_{23})^2; \quad (14.50)$$

$$F_{2n-1} = A(e_2 t_{12} t_{23})(e_2^2 r_{21} r_{23})^{n-1}; \quad (14.51)$$

Подставляя (14.48)–(14.51) в (14.43), получаем:

$$\begin{aligned} U_F &= A \{ e_2 t_{12} t_{23} \times \\ &\quad \times [1 + (e_2^2 r_{21} r_{23})^1 + (e_2^2 r_{21} r_{23})^2 + \dots + (e_2^2 r_{21} r_{23})^{n-1} + \dots] \} = \\ &= A e_2 t_{12} t_{23} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (e_2^2 r_{21} r_{23})^n \right\}. \end{aligned} \quad (14.52)$$

Сумма, входящая в это выражение, аналогична (14.41). При этом получаем:

$$U_F = A \left\{ t_{12} t_{23} \frac{e_2}{1 - e_2^2 r_{21} r_{23}} \right\}. \quad (14.53)$$

В этом выражении  $e_2$  определяется формулой (14.3).

Таким образом, с учетом (14.3) выражения (14.42) и (14.53) для амплитуд отраженной и проходящей волн принимают вид: для отраженной волны:

$$U_B = A \left\{ r_{12} + r_{23} t_{12} t_{21} \frac{\exp(-2ik_2 d_2)}{1 - r_{21} r_{23} \exp(-2ik_2 d_2)} \right\}; \quad (14.54)$$

для проходящей волны:

$$U_F = A \left\{ t_{12} t_{23} \frac{\exp(-ik_2 d_2)}{1 - r_{21} r_{23} \exp(-2ik_2 d_2)} \right\}. \quad (14.55)$$

### 14.2.6. Амплитуды внутренних волн

Метод переотражений для одного слоя без труда позволяет также найти амплитуды суммарных волн внутри этого слоя.

Действительно, согласно рис. 14.2, внутри ячейки с номером  $n$  распространяются две внутренние волны с амплитудами  $E_{2n-1}$  и  $C_{2n-2}$ , определяемыми формулами (14.20) и (14.33):

$$E_{2n-1} = D_{2n-1} r_{23} = C_{2n-2} e_2 r_{23}; \quad (14.56)$$

$$C_{2n-2} = C_{2n-4} e_2^2 r_{21} r_{12} = A t_{21} (e_2^2 r_{21} r_{23})^{n-1}. \quad (14.57)$$

При этом суммарная амплитуда внутренней обратно направленной волны, то есть распространяющейся от границы 2 к границе 1, равна:

$$U_E = E_1 + E_3 + E_5 + \dots + E_{2n-1} + \dots \quad (14.58)$$

Здесь, в соответствии с (14.6), (14.13), (14.20),

$$E_1 = C_0 e_2 r_{23}; \quad (14.59)$$

$$E_3 = C_2 e_2 r_{23}; \quad (14.60)$$

$$E_5 = C_4 e_2 r_{23}; \quad (14.61)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$E_{2n-1} = C_{2n-2} e_2 r_{23}, \quad (14.62)$$

$$\dots \dots \dots$$

где  $C_0, C_2, C_4, \dots, C_{2n-2}, \dots$  определяются формулами (14.30)–(14.33).

Подставляя (14.30)–(14.33) в (14.59)–(14.62), получаем:

$$E_1 = A(e_2 r_{23} t_{12})(e_2^2 r_{21} r_{23})^0; \quad (14.63)$$

$$E_3 = A(e_2 r_{23} t_{12})(e_2^2 r_{21} r_{23})^1; \quad (14.64)$$

$$E_5 = A(e_2 r_{23} t_{12})(e_2^2 r_{21} r_{23})^2; \quad (14.65)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$E_{2n-1} = A(e_2 r_{23} t_{12})(e_2^2 r_{21} r_{23})^{n-1}; \quad (14.66)$$

$$\dots \dots \dots$$

Подставляя (14.63)–(14.66) в (14.58), получаем:

$$U_E = A \left\{ e_2 r_{23} t_{12} \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + (e_2^2 r_{21} r_{23})^1 + (e_2^2 r_{21} r_{23})^2 + \dots + (e_2^2 r_{21} r_{23})^{n-1} + \dots \right] \right\} = \\ = A \left\{ e_2 r_{23} t_{12} \sum_{n=0}^{\infty} (e_2^2 r_{21} r_{23})^n \right\}, \quad (14.67)$$

откуда с учетом (14.41) получаем

$$U_E = A \left\{ r_{23} t_{12} \frac{e_2}{1 - e_2^2 r_{21} r_{23}} \right\}. \quad (14.68)$$

Аналогично можно найти суммарную амплитуду внутренней прямо направленной волны, распространяющейся от границы 1 к границе 2:

$$U_C = C_0 + C_2 + C_4 + \dots + C_{2n-2} + \dots, \quad (14.69)$$

где  $C_0, C_2, C_4, \dots, C_{2n-2}, \dots$  определяются формулами (14.30)–(14.33).

Подставляя (14.30)–(14.33) в (14.69), получаем:

$$U_C = A \left\{ t_{12} \times \left[ 1 + (e_2^2 r_{21} r_{23})^1 + (e_2^2 r_{21} r_{23})^2 + \dots + (e_2^2 r_{21} r_{23})^{n-1} + \dots \right] \right\} = \\ = A \left\{ t_{12} \sum_{n=0}^{\infty} (e_2^2 r_{21} r_{23})^n \right\}, \quad (14.70)$$

откуда с учетом (14.41) получаем

$$U_C = A \left\{ t_{12} \frac{1}{1 - e_2^2 r_{21} r_{23}} \right\}. \quad (14.71)$$

С учетом (14.3) выражения (14.68) и (14.71) можно привести к виду: для внутренней обратно направленной волны

$$U_E = A \left\{ r_{23} t_{12} \frac{\exp(-ik_2 d_2)}{1 - r_{21} r_{23} \exp(-2ik_2 d_2)} \right\}; \quad (14.72)$$

для внутренней прямо направленной волны

$$U_C = A \left\{ t_{12} \frac{1}{1 - r_{21} r_{23} \exp(-2ik_2 d_2)} \right\}. \quad (14.73)$$

### 14.3. Сравнение с прямым методом

Приведем теперь полученные амплитуды всех волн (14.54), (14.55), (14.72), (14.73) к виду, удобному для сравнения с результатами прямого метода [1, стр. 199–251], для чего запишем их в несколько другом порядке и с явным видом для экспонент:

$$U_B = A \left\{ r_{12} + r_{23} t_{12} t_{21} \frac{e^{-2ik_2 d_2}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2ik_2 d_2}} \right\}; \quad (14.74)$$

$$U_C = A \left\{ t_{12} \frac{1}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2ik_2 d_2}} \right\}; \quad (14.75)$$

$$U_E = A \left\{ r_{23} t_{12} \frac{e^{-ik_2 d_2}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2ik_2 d_2}} \right\}; \quad (14.76)$$

$$U_F = A \left\{ t_{12} t_{23} \frac{e^{-ik_2 d_2}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2ik_2 d_2}} \right\}. \quad (14.77)$$

Будем считать, что входящие в эти формулы коэффициенты отражения и прохождения  $r_{ik}$  и  $t_{ik}$ , где  $i, k = 1, 2, 3$ , известны из решения задачи об одной границе между двумя средами, которую в данном случае удобнее всего решить прямым методом [1, стр. 77, форм. (2.18), (2.19)]. Полученные таким образом все возможные коэффициенты для границ 1 и 2 имеют вид:

коэффициент отражения из среды 1 в среду 1 от границы 1

$$r_{12} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \quad (14.78)$$

коэффициент отражения из среды 2 в среду 2 от границы 1

$$r_{21} = -\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \quad (14.79)$$

коэффициент отражения из среды 2 в среду 2 от границы 2

$$r_{23} = \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3}; \quad (14.80)$$

коэффициент отражения из среды 3 в среду 3 от границы 2

$$r_{32} = -\frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3}; \quad (14.81)$$

коэффициент прохождения из среды 1 в среду 2 через границу 1

$$t_{12} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}; \quad (14.82)$$

коэффициент прохождения из среды 2 в среду 1 через границу 1

$$t_{21} = \frac{2k_2}{k_1 + k_2}; \quad (14.83)$$

коэффициент прохождения из среды 2 в среду 3 через границу 2

$$t_{23} = \frac{2k_2}{k_2 + k_3}; \quad (14.84)$$

коэффициент прохождения из среды 3 в среду 2 через границу 2

$$t_{32} = \frac{2k_3}{k_2 + k_3}. \quad (14.85)$$

Подставляя эти коэффициенты в выражения (14.74)–(14.77), после некоторых преобразований получаем:

$$U_B = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}} A; \quad (14.86)$$

$$U_C = \frac{2k_1(k_2 + k_3)e^{ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}} A; \quad (14.87)$$

$$U_E = \frac{2k_1(k_2 - k_3)}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}} A; \quad (14.88)$$

$$U_F = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}} A. \quad (14.89)$$

Решение той же задачи прямым методом имеет вид [1, стр. 116, форм. (3.54)–(3.57)]:

$$B = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}} A; \quad (14.90)$$

$$C = \frac{2k_1(k_2 + k_3)e^{ik_2d}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}} A; \quad (14.91)$$

$$D = \frac{2k_1(k_2 - k_3)}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}} A; \quad (14.92)$$

$$E = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{ik_2d} + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{-ik_2d}} A. \quad (14.93)$$

Как видим, полученные методом переотражений амплитуды (14.86)–(14.89) с точностью до обозначений полностью совпадают с амплитудами, полученными прямым методом (14.90)–(14.93).

#### 14.4. Выражение коэффициентов отражения и прохождения для одной границы через волновые числа соседствующих сред

Метод переотражений дает амплитуды отраженной и проходящей волн, выраженные через коэффициенты отражения и прохождения для одной границы. Эти коэффициенты удобнее всего найти прямым методом [1, стр. 203, форм. (5.29) с учетом (5.26)–(2.28)]. Предположим, что коэффициенты при прямом и обратном направлениях распространения волны могут быть различными, то есть будем искать их для случая падения на границу двух встречных волн с разными амплитудами.

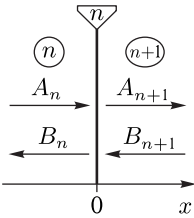


Рис. 14.3. Геометрия задачи о падении двух встречных волн на одну границу

Геометрия задачи показана на рис. 14.3. Здесь на границу с номером  $n$ , разделяющую среды с номерами  $n$  и  $n + 1$ , падают две волны: со стороны среды  $n$  в положительном направлении оси  $Ox$  волна с начальной амплитудой  $A_n$  и со стороны среды  $n + 1$  в отрицательном направлении той же оси — волна с амплитудой  $B_{n+1}$ . От границы отходят также две волны: в среду  $n$  волна  $B_n$  и в среду  $n + 1$  волна  $A_{n+1}$ .

Найдем сначала амплитуды выходящих волн  $B_n$  и  $A_{n+1}$  через амплитуды падающих волн  $A_n$  и  $B_{n+1}$ , которые положим изначально заданными.

Амплитуды волновых функций в средах  $n$  и  $n + 1$  имеют вид:

$$U_n = A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}; \quad (14.94)$$

$$U_{n+1} = A_{n+1} e^{-ik_{n+1} x} + B_{n+1} e^{ik_{n+1} x}. \quad (14.95)$$

Производные от волновых функций имеют вид:

$$\frac{dU_n}{dx} = -ik_n A_n e^{-ik_n x} + ik_n B_n e^{ik_n x}; \quad (14.96)$$

$$\frac{dU_{n+1}}{dx} = -ik_{n+1} A_{n+1} e^{-ik_{n+1} x} + ik_{n+1} B_{n+1} e^{ik_{n+1} x}. \quad (14.97)$$

Граничные условия — равенство на границе при  $x = 0$  функций и их производных:

$$U_n|_{x=0} = U_{n+1}|_{x=0}; \quad (14.98)$$

$$\left. \frac{dU_n}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dU_{n+1}}{dx} \right|_{x=0}. \quad (14.99)$$

Подставляя (14.94)–(14.97) в (14.98)–(14.99), получаем систему уравнений для  $B_n$  и  $A_{n+1}$ , выраженных через  $A_n$  и  $B_{n+1}$ :

$$B_n - A_{n+1} = -A_n + B_{n+1}; \quad (14.100)$$

$$k_n B_n + k_{n+1} A_{n+1} = k_n A_n + k_{n+1} B_{n+1}. \quad (14.101)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$B_n = \frac{k_n - k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}} A_n + \frac{2k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}} B_{n+1}; \quad (14.102)$$

$$A_{n+1} = \frac{2k_n}{k_n + k_{n+1}} A_n - \frac{k_n - k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}} B_{n+1}. \quad (14.103)$$

Можно видеть, что эти формулы с точностью до обозначений совпадают с полученными прямым методом в работе [1, стр. 203, форм. (5.29) с учетом (5.26)–(5.28)].

Из формул (14.102)–(14.103) находим коэффициенты по амплитудам в следующем виде:

коэффициент отражения из среды  $n$  в ту же среду  $n$

$$r_{n/n+1} = \left. \frac{B_n}{A_n} \right|_{B_{n+1}=0} = \frac{k_n - k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}}; \quad (14.104)$$

коэффициент отражения из среды  $n + 1$  в ту же среду  $n + 1$

$$r_{n+1/n} = \left. \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} \right|_{A_n=0} = -\frac{k_n - k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}}; \quad (14.105)$$

коэффициент прохождения из среды  $n$  в среду  $n + 1$

$$t_{n/n+1} = \left. \frac{A_{n+1}}{A_n} \right|_{B_{n+1}=0} = \frac{2k_n}{k_n + k_{n+1}}; \quad (14.106)$$

коэффициент прохождения из среды  $n + 1$  в среду  $n$

$$t_{n+1/n} = \left. \frac{B_n}{B_{n+1}} \right|_{A_n=0} = \frac{2k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}}. \quad (14.107)$$

Для задачи об одном слое между двумя границами, разделяющими среды 1, 2 и 3, коэффициенты имеют вид:

коэффициент отражения из среды 1 в среду 1 от границы 1

$$r_{12} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \quad (14.108)$$

коэффициент отражения из среды 2 в среду 2 от границы 1

$$r_{21} = -\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; \quad (14.109)$$

коэффициент отражения из среды 2 в среду 2 от границы 2

$$r_{23} = \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3}; \quad (14.110)$$

коэффициент отражения из среды 3 в среду 3 от границы 2

$$r_{32} = -\frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3} \quad (14.111)$$

коэффициент прохождения из среды 1 в среду 2 через границу 1

$$t_{12} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}; \quad (14.112)$$

коэффициент прохождения из среды 2 в среду 1 через границу 1

$$t_{21} = \frac{2k_2}{k_1 + k_2}; \quad (14.113)$$

коэффициент прохождения из среды 2 в среду 3 через границу 2

$$t_{23} = \frac{2k_2}{k_2 + k_3}; \quad (14.114)$$

коэффициент прохождения из среды 3 в среду 2 через границу 2

$$t_{32} = \frac{2k_3}{k_2 + k_3}. \quad (14.115)$$

Эти коэффициенты можно использовать для нахождения амплитуд внешних и внутренних волн, получаемых методом переотражений.

## 14.5. Падение волны встречного направления

Рассмотрим теперь задачу, геометрически противоположную описанной в разделе 14.2, то есть получим коэффициенты отражения и прохождения при падении на структуру волны встречного направления.

### 14.5.1. Общая геометрия задачи

Рассмотрим падение обратно направленной (встречной) одномерной волны на один слой, заключенный между двумя границами. Определение волны как «обратно направленной» означает, что исходная падающая волна в этом случае распространяется в отрицательном направлении оси  $Ox$ . Геометрия задачи схематически иллюстрируется рис. 14.4.

Структура состоит из трех однородных сред 1, 2 и 3, разделенных двумя бесконечно тонкими границами 1 и 2. Все волны распространяются вдоль оси  $Ox$ , перпендикулярной к обеим границам. Координаты границ —  $x_1$  и  $x_2$ , расстояние между ними

$$d_2 = x_2 - x_1, \quad (14.116)$$

где индекс «2» соответствует номеру среды.

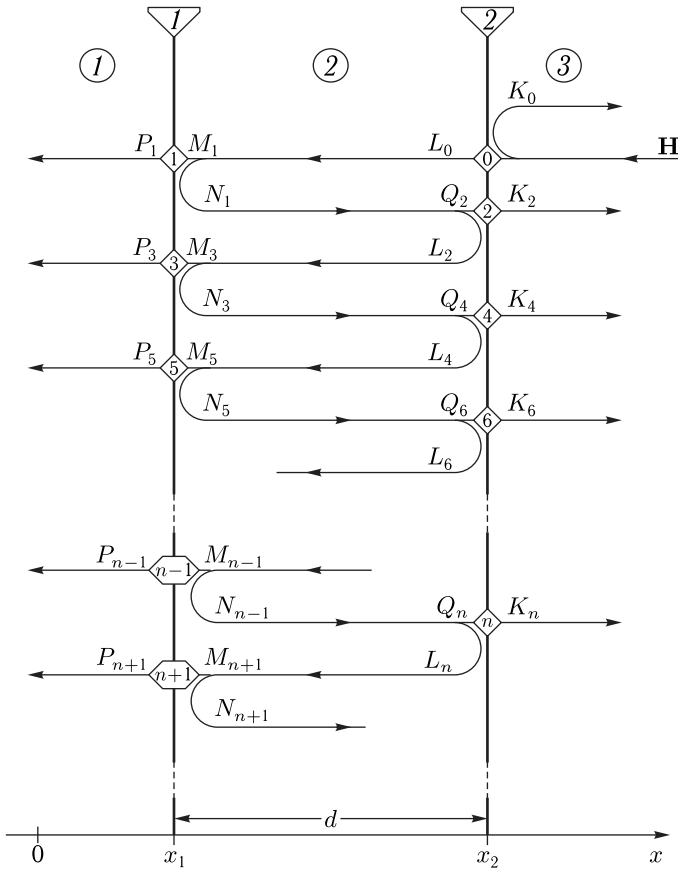


Рис. 14.4. Геометрия задачи

Исходная волна с начальной амплитудой  $H$  падает с правой стороны на границу 2. Происходит акт взаимодействия волны с этой границей №0, в результате чего от границы отходят две частичные волны: отраженная с амплитудой  $K_0$  и проходящая с амплитудой  $L_0$ . Распространяясь от границы 2 до границы 1 проходящая волна  $L_0$  приобретает набег фазы, превращаясь вблизи границы 1 в волну  $M_1$ , которая при взаимодействии с границей 1 (акт взаимодействия №1), дает две новые частичные волны: отраженную в среду 2 волну  $N_1$  и проходящую в среду 1 волну  $P_1$ . Волна  $N_1$ , подходя к границе 2, переходит в волну  $Q_2$ , которая в результате акта взаимодействия №2 дает новые частичные волны: отраженную в среду 2 волну  $L_2$  и выходящую в среду 3 волну  $K_2$ . Далее волна  $L_2$ , переходя в волну  $M_3$ , в результате акта №3 порождает частичные волны  $N_3$  и  $P_3$ , и процесс внутренних



переотражений с образованием частичных волн развивается дальше по той же схеме.

Внизу на рисунке показаны акты взаимодействия  $n - 1$ ,  $n$  и  $n + 1$ , иллюстрирующие развитие процесса вплоть до бесконечности, в результате чего в среде 3 формируется суммарная отраженная волна, а в среде 1 — суммарная проходящая.

### 14.5.2. Представление единичной ячейки

Схему переотражений, представленную на рис. 14.4, можно представить в виде совокупности последовательно соединенных единичных ячеек, одна из которых с номером  $n$  показана на рис. 14.5.

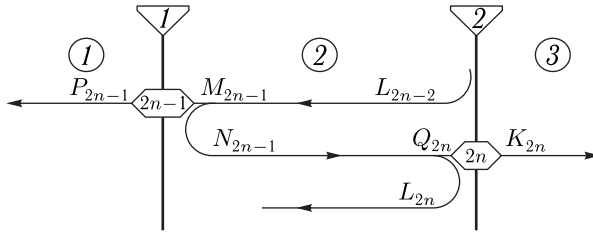


Рис. 14.5. Единичная ячейка переотражения с номером  $n$

При изменении  $n$  от 1 до  $+\infty$  осуществляется перебор всех актов взаимодействия волны с границами от  $N_1$  до  $+\infty$ , в результате чего полную суммарную отраженную волну в среде 3 и суммарную проходящую волну в среде 1 можно представить в виде сумм частичных волн по  $n$ . При этом акт взаимодействия  $N_0$  надо учесть отдельно.

Распространение волны внутри среды 2 справа налево можно представить в виде:

$$U_2 \sim \exp[i(\omega t + k_2 x)]. \quad (14.117)$$

Такая волна, проходя от границы 2 до границы 1, приобретает задержку во времени, равную  $\Delta t = d/v$ , где  $v = \omega/k_2$  — фазовая скорость волны в среде 2, то есть:  $\Delta t = k_2 d/\omega$ . Таким образом, полагая, например, что поле волны на границе 2 равно  $\exp[i\omega t]$  (так будет при  $x_2 = 0$ ), получаем поле волны на границе 1 равным:  $\exp[i\omega(t - \Delta t)] = \exp[i(\omega t - k_2 d)]$ , что эквивалентно умножению исходного поля волны на фазовый множитель  $\exp(-ik_2 d)$ . Очевидно, этот множитель от выбора начала координат никак не зависит. Волна, проходящая в обратном направлении от границы 1 к границе 2, приобретает ту же задержку во времени и тот же множитель. То есть для волны, пробегающей между двумя границами туда и обратно, этот множитель возводится в квадрат, а в процессе многократных переотражений возводится в степень, равную числу отражений волны от той или иной границы. Для упрощения дальнейшей записи для такого множителя введем обозначение:

$$e_2 = \exp(-ik_2 d). \quad (14.118)$$



распространяющаяся внутри среды 2 в прямом направлении

$$Q_{2n} = N_{2n-1}e_{2b} = L_{2n-2}e_2^2 r_{21}; \quad (14.127)$$

переходящая в ячейку  $2n + 1$  внутри среды 2

$$L_{2n} = Q_{2n} r_{23} = L_{2n-2}e_2^2 r_{21} r_{23}; \quad (14.128)$$

выходящая на отражение в среду 3

$$K_{2n} = Q_{2n} t_{23} = L_{2n-2}e_2^2 r_{21} t_{23}. \quad (14.129)$$

#### 14.5.5. Амплитуды внешних волн

Суммарная амплитуда волны, отраженной от среды 2, равна сумме всех волн  $K_{2n}$  от  $n = 1$  до  $+\infty$ , а также волны  $K_0$ , отраженной от границы 2 при падении на нее исходной волны  $H$  (акт взаимодействия № 0, учитываемый отдельно):

$$U_K = K_0 + K_2 + K_4 + \dots + K_{2n} + \dots \quad (14.130)$$

В этом выражении

$$K_0 = H r_{32}, \quad (14.131)$$

а все остальные  $K_2, K_4, \dots, K_{2n}, \dots$  определяются по формуле, получаемой из (14.129) с учетом (14.122):

$$K_{2n} = L_{2n-2}e_2^2 r_{21} t_{23} = H e_2^2 r_{21} t_{23} t_{32} (e_2^2 r_{21} r_{23})^{n-1}. \quad (14.132)$$

В результате получаем:

$$U_K = H \left\{ r_{32} + (e_2^2 r_{21} t_{32} t_{23}) \sum_{n=0}^{\infty} (e_2^2 r_{21} r_{23})^n \right\}. \quad (14.133)$$

Здесь выражение под знаком суммы представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем  $q = e_2^2 r_{21} r_{23}$ . Пользуясь выражением для суммы такой прогрессии, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e_2^2 r_{21} r_{23})^n = \frac{1}{1 - e_2^2 r_{21} r_{23}}. \quad (14.134)$$

С учетом этого выражения (14.133) принимает вид:

$$U_K = H \left\{ r_{32} + r_{21} t_{32} t_{23} \frac{e_2^2}{1 - e_2^2 r_{21} r_{23}} \right\}, \quad (14.135)$$

где  $e_2$  определяется формулой (14.118).

Найдем теперь суммарную амплитуду волны, проходящей через среду 2, которая равна сумме всех волн  $P_{2n-1}$  от  $n = 1$  до  $+\infty$ :

$$U_P = P_1 + P_3 + P_5 + \dots + P_{2n-1} + \dots, \quad (14.136)$$

где  $P_1, P_3, \dots, P_{2n-1}, \dots$  определяются по формуле (14.126) с учетом (14.122). В результате получаем:

$$U_P = H \left\{ e_2 t_{32} t_{21} \sum_{n=0}^{\infty} (e_2^2 r_{21} r_{23})^n \right\}. \quad (14.137)$$

Учитывая (14.134), получаем:

$$U_P = H \left\{ t_{32} t_{21} \frac{e_2}{1 - e_2^2 r_{21} r_{23}} \right\}. \quad (14.138)$$

В этом выражении  $e_2$  определяется формулой (14.118).

### 14.5.6. Амплитуды внутренних волн

Найдем теперь для того же слоя амплитуды внутренних волн.

Согласно рис. 14.5, внутри ячейки с номером  $n$  распространяются две внутренние волны с амплитудами  $L_{2n-2}$  и  $N_{2n-1}$ , определяемыми формулами (14.122) и (14.125):

$$L_{2n-2} = L_{2n-4} e_2^2 r_{21} r_{23} = H t_{32} (e_2^2 r_{21} r_{23})^{n-1}, \quad (14.139)$$

$$N_{2n-1} = L_{2n-2} e_2 r_{21} = H e_2 r_{21} t_{32} (e_2^2 r_{21} r_{23})^{n-1}. \quad (14.140)$$

При этом суммарная амплитуда внутренней обратно направленной волны, то есть распространяющейся от границы 2 к границе 1, равна:

$$U_L = L_0 + L_2 + L_4 + \dots + L_{2n-2} + \dots, \quad (14.141)$$

где  $L_0, L_2, \dots, L_{2n-2}, \dots$  имеют вид (14.119)–(14.129).

Подставляя (14.119)–(14.122) в (14.141), получаем:

$$U_L = H \left\{ t_{32} \sum_{n=0}^{\infty} (e_2^2 r_{21} r_{23})^n \right\}, \quad (14.142)$$

откуда с учетом (14.134) получаем:

$$U_L = H \left\{ t_{32} \frac{1}{1 - e_2^2 r_{21} r_{23}} \right\}. \quad (14.143)$$

Аналогично можно найти суммарную амплитуду внутренней прямо направленной волны, распространяющейся от границы 1 к границе 2:

$$U_N = N_1 + N_3 + N_5 + \dots + N_{2n-1} + \dots, \quad (14.144)$$

где  $N_1, N_3, N_5, \dots, N_{2n-1}, \dots$  определяются формулой (14.140) с учетом (14.122):

$$N_{2n-1} = H e_2 r_{21} t_{32} (e_2^2 r_{21} r_{23})^{n-1}. \quad (14.145)$$

Подставляя (14.145) в (14.144), получаем:

$$U_N = H \left\{ e_2 r_{21} t_{32} \sum_{n=0}^{\infty} (e_2^2 r_{21} r_{23})^n \right\}, \quad (14.146)$$

откуда с учетом (14.134) получаем:

$$U_N = H \left\{ r_{21} t_{32} \frac{e_2}{1 - e_2^2 r_{21} r_{23}} \right\}. \quad (14.147)$$

И так получаем амплитуды внешних и внутренних волн, возбуждаемых встречной волной с амплитудой  $H$  в среде 3:

внешняя прямо направленная, отраженная из среды 3 в среду 3 (14.135)

$$U_K = H \left\{ r_{32} + r_{21} t_{32} t_{23} \frac{e_2^2}{1 - e_2^2 r_{21} r_{23}} \right\}, \quad (14.148)$$

внешняя обратно направленная, проходящая из среды 3 в среду 1 (14.137)

$$U_P = H \left\{ t_{32} t_{21} \frac{e_2}{1 - e_2^2 r_{21} r_{23}} \right\}, \quad (14.149)$$

внутренняя обратно направленная, распространяющаяся внутри среды 2 от границы 2 к границе 1 (14.143)

$$U_L = H \left\{ t_{32} \frac{1}{1 - e_2^2 r_{21} r_{23}} \right\}, \quad (14.150)$$

внутренняя прямо направленная, распространяющаяся внутри среды 2 от границы 1 к границе 2 (14.146)

$$U_N = H \left\{ r_{21} t_{32} \frac{e_2}{1 - e_2^2 r_{21} r_{23}} \right\}, \quad (14.151)$$

где  $e_2$  определяется формулой (14.118).

Из рассмотрения структуры полученных формул можно видеть, что с точностью до обозначений они являются «зеркальным отражением» волн, полученных при падении волны прямого направления. Так, волна, отраженная в ту же сторону, из которой приходит падающая, здесь определяется формулой (14.148), а при прямом падении — формулой (14.54). Волна, проходящая в том же направлении, что распространяется падающая, здесь выражается формулой (14.149), а при прямом падении — формулой (14.55). Подобное обращение имеет место и для внутренних волн. Так, формула (14.150) является зеркальным отражением формулы (14.71), а формула (14.151) — отражением формулы (14.68). Следует полагать, что такая симметрия является отражением зеркальной симметрии геометрии обеих задач.

**Замечание.** Заметим, однако, что коэффициенты на границах могут меняться местами по индексам, но не по величине, так что, например, отражение от структуры в целом при прямом и обратном падении волн по величине может различаться, особенно в том случае, если по обе стороны от слоя находятся среды с различающимися параметрами. В то же время, такое различие противоречило бы принципу взаимности [130, стр. 130–132], [112, стр. 246–248] (также раздел 11.3.3), что не должно иметь места. По-видимому, для разрешения подобно-

го противоречия следует обращаться к рассмотрению баланса энергий распространяющихся волн, некоторые аспекты которого освещены в работах [63, 71]. Более подробное решение этого вопроса авторы осмеливаются рекомендовать любознательному читателю.

### 14.6. Некоторые заключительные замечания

В настоящей главе приведена элементарная трактовка метода переотражений, в значительной степени изложенная с субъективной точки зрения авторов. Разумеется, такой подход нельзя считать универсальным и исчерпывающим. Так, авторы не ставили себе задачу дать подробный вывод классических «формул Эйри» [3, стр. 355, форм. (9), (13)]. Не рассмотрено также применение метода для расчета параметров интерференционных приборов или полос интерференции в тонких пленках. Со всеми этими вопросами любознательный читатель может познакомиться по монографии [3, стр. 352–401], а также по другим многочисленным источникам.

Назовем все же некоторые моменты, которые можно развить, отталкиваясь от предложенной здесь трактовки. Прежде всего отметим, что метод описан только для одномерных волн, тогда как в оптике и многих других применениях участвуют электромагнитные, упругие и другие волны. Применение метода для таких волн требует развития. Далее, метод изложен так, как если бы волна распространялась точно по нормали к рассматриваемому слою. В оптике же сплошь и рядом рассматривается наклонное падение, в том числе волн разных поляризации. То есть метод можно развить и в этом направлении. Важнейшим вопросом можно считать расширение метода на случай многослойных структур, для начала, состоящих хотя бы из двух слоев. В этом случае можно ставить вопрос об определении локальных коэффициентов для границы между слоями, исходя из коэффициентов отражения и прохождения для структуры в целом.

Таким образом, изложенная здесь трактовка метода переотражений может дать пищу для размышлений и постановку множества задач, поиск решения которых авторы осмеливаются рекомендовать любознательному читателю.

### Выводы по главе 14

Данная глава посвящена описанию математического аппарата метода переотражений, в применении к расчету распространения волн в структуре, представляющей собой один слой, окруженный двумя инородными средами. Рассмотрение выполнено на основе одномерных волн прямого и встречного направлений.

Основные результаты, полученные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Выполнен краткий обзор применения метода переотражений для классических задач о распространении волн, в первую очередь — в оптике. Упомянуты интерферометрические приборы, интерференционные фильтры, измерение параметров тонких пленок. Отмечено ограничение метода переотражений задачами о распространении волн только через один слой, окруженный двумя инородными средами, причем локальные коэффициенты отражения и прохождения по амплитуде на границах слоя предполагаются известными.

2. Приведена геометрия метода, отмечены траектории волн прямого и обратного направлений внутри и вне структуры. Выявлена роль локальных коэффициентов отражения и прохождения на границах слоя, получены амплитуды отходящих от границы волн, выраженных через эти коэффициенты. Рассмотрена схема сложения амплитуд распространяющихся волн обоих направлений. Установлено, что благодаря интерференционному взаимодействию, суммарные амплитуды волн могут быть записаны в виде степенных рядов из экспонент, представляющих собой бесконечно убывающие геометрические прогрессии.

3. Путем суммирования соответствующих прогрессий получены амплитуды внутренних и внешних волн внутри и вне слоя, выраженные через локальные коэффициенты отражения и прохождения для границ слоя. Приведена схема получения локальных коэффициентов из волновых чисел слоя и окружающих его сред с использованием прямого метода. Выполнено сравнение получаемых методом переотражений амплитуд отраженной и проходящей волн с амплитудами таких же волн, полученными прямым методом для структуры из трех сред. Установлено полное тождество получаемых выражений.

4. Рассмотрено распространение волн внутри и вне структуры при падении на слой волны обратного направления. Отмечено, что результирующие волны, образуемые в результате многократных переотражений, формируются путем того же интерференционного механизма, как и в случае падения волны прямого направления.

5. Установлено, что получаемые в результате амплитуды волн являются «зеркальным отражением» амплитуд подобных волн, соответствующих падению на слой волны прямого направления. Отмечено, что причиной подобного сходства является симметрия геометрии структуры и траекторий распространяющихся волн.

6. Приведены некоторые замечания, касающиеся дальнейшего развития работы. В качестве перспективных направлений отмечено обобщение метода на случай электромагнитных и упругих волн, а также учет наклонного падения волн различных поляризаций.

Заметный интерес представляет также развитие метода на случаи структур, содержащих два и более слоев.

## Литература

1. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Волны в многослойных структурах. Часть 1. Методы расчета: прямой, усреднения, матрицы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022.
2. Хвольсон О.Д. Курс физики. Берлин: Госиздат РСФСР, 1923. Т. 2.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
5. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976.
6. Поль Р.В. Введение в оптику. М.–Л.: ОГИЗ. Гос. изд. техн.-теор. лит., 1947.
7. Кизель В.А. Отражение света. М.: Наука, 1973.
8. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989.
9. Розенберг Г.В. Оптика тонкослойных покрытий. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958.
10. Бреховских Л.М. Отражение плоских волн от слоисто-неоднородных сред // ЖТФ. 1949. Т. 19, № 10. С. 1126–1135.
11. Oksanen M.I., Hanninen J., Tretyakov S.A. Vector circuit method for calculating reflection and transmission of electromagnetic waves in multilayered chiral structures // IEEE Proceedings. Н. 1991. V. 138, № 7. P. 513–520.
12. Sarychev A.K., Bergman D.J., Yagil Y. Theory of the optical and microwave properties of metal-dielectric films // PR(B). 1995. V. 51, № 8. P. 5366–5385.
13. Шварцбург А.Б. Дисперсия электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах (точно решаемые модели) // УФН. 2000. Т. 170, № 12. С. 1297–1324.
14. Каплан А.Е. Об отражательной способности металлических пленок в СВЧ- и радиодиапазоне // РЭ. 1964. Т. 11. № 10. С. 1781–1787.
15. Лакс Б., Баттон К. Сверхвысокочастотные ферриты и ферримангнетики. М.: Мир, 1965.
16. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. М.: Госэнергоиздат, 1963.
17. Гуревич А.Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960.
18. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука, 1973.
19. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1994.
20. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967.



21. *Вашковский А. В., Стальмахов В. С., Шараевский Ю. П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд. Саратовского университета, 1993.
22. *Вендик О. Г., Калиникоз Б. А.* Волновые процессы в пленочных ферритовых слоистых структурах — физические основы спин-волновой электроники // Изв. вузов. Физика. 1988. Т. 31. № 11. С. 3–5.
23. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Магнитостатические волны в неоднородных полях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016.
24. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017.
25. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018.
26. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019.
27. *Гуляев Ю. В., Тарасенко С. В., Шавров В. Г.* Спин-волновая акустика антиферромагнитных структур как магнитоакустических метаматериалов // УФН. 2011. Т. 181, № 6. С. 595–626.
28. *Гуляев Ю. В., Никитов С. А., Животовский Л. В., Климов А. А., Тайад Ф., Пресманес Л., Бонин К., Цай Ч. С., Высоцкий С. Л., Филимонов Ю. А.* Ферромагнитные пленки с периодическими структурами с магнотной запрещенной зоной — магнотные кристаллы // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77, № 10. С. 670–674.
29. *Гуляев Ю. В., Никитов С. А., Волков А. И.* Поверхностные магнитостатические спиновые волны в двумерных магнотных кристаллах // РЭ. 2007. Т. 50, № 9. С. 1107–1113.
30. *Третьяков С. А.* Электродинамика сложных сред: киральные, биизотропные и некоторые бианизотропные материалы (обзор) // РЭ. 1994. Т. 39, № 10. С. 1457–1470.
31. *Козарь А. В.* Оптические свойства аперидических тонкослойных структур: эффективный показатель преломления // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2009. Т. 64. № 3. С. 54–56.
32. *Козарь А. В.* Оптические свойства аперидических тонкослойных структур: эффективная оптическая толщина // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2018. Т. 3, № 6. С. 61–66.
33. *Козарь А. В., Трофимов А. В., Потапов А. А.* Процесс нестационарного отражения коротких электромагнитных импульсов от многослойных фильтров с максимально плоской амплитудно-частотной характеристикой // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2016. № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr16/1/text.pdf>
34. *Козарь А. В., Трофимов А. В.* Явление нестационарного отражения импульсных сигналов от слоистых структур с потерями // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2013, № 5. С. 38–43.
35. *Vobrovnikov Y. A., Gorokhov P. N., Kozar' A. V.* Transformation of pulses with the help of layer interference structures // Quantum Electronics. 2003. V. 33, № 11. P. 1019–1021.
36. *Бобровников Ю. А., Горохов П. Н., Козарь А. В.* Явление нестационарного отражения электромагнитных волн с изменяющейся амплитудой от сло-

- истых структур // Известия РАН. Серия физическая. 2002. Т. 66, № 12. С. 1923–1826.
37. *Weiner A.M.* Ultrafast optical pulse shaping: A tutorial review // *Optics Communications*. 2011. V. 284. P. 3669–3692.
38. *Шустер А.* Введение в теоретическую оптику. М., Л.: ОНТИ. Гл. ред. общетех. лит., 1935.
39. *Веселаго В.Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  // *УФН*. 1967. Т. 92, № 3. С. 517–526.
40. *Агранович В.М., Гармштейн Ю.Н.* Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света // *УФН*. 2006. Т. 176. № 10. С. 1052–1068.
41. *Parimi P.V., Lu W.T., Vodo P., Sokoloff J., Derov J.S., Sridhar S.* Negative refraction and left-handed electromagnetism in microwave photonic crystals // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 92, № 12. P. 127401(4).
42. *Lindell I.V., Tretyakov S.A., Nikoskinen K.I., Ilvonen S.* BW media — media with negative parameters, capable of supporting backward waves // *Microwave and Optical Technology Letters*. 2001. V. 31, № 2. P. 129–133.
43. *Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C., Nemat-Nasser S.C., Schultz S.* Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 84, № 18. P. 4184–4187.
44. *Pendry J.B.* Negative refraction makes a perfect lens // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 85, № 18. P. 3966–3969.
45. *Pendry J.B., Holden A.J., Stewart W.J., Youngs I.* Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76, № 25. P. 4773–4776.
46. *Strel'niker Y.M., Bergman D.J.* Theory of magnetotransport in a composite medium with periodic microstructure for arbitrary magnetic fields // *Phys. Rev. B*. 1994. V. 50. № 19. P. 14001–14015.
47. *Локк Э.Г.* Свойства изочастотных зависимостей и законы геометрической оптики // *УФН*. 2008. Т. 178, № 4. С. 397–417.
48. *Веселаго В.Г.* Волны в метаматериалах: их роль в современной физике // *УФН*. 2011. Т. 181, № 11. С. 1201–1205.
49. *Sarychev A.K., Bergman D.J., Yagil Y.* Theory of the optical and microwave properties of metal-dielectric films // *PR(B)*. 1995. V. 51, № 8. P. 5366–5385.
50. *Levy-Nathansohn R., Bergman D.J.* Decoupling and testing of the generalized Ohm's law // *PR(B)*. 1997. V. 55, № 8. P. 5425–5439.
51. *Антонец И.В., Котов Л.Н., Некипелов С.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Электродинамические свойства тонких металлических пленок с различной толщиной и морфологией поверхности // *РЭ*. 2004. Т. 49, № 10. С. 1243–1250.
52. *Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Проводящие и отражающие свойства пленок нанометровых толщин из различных металлов // *РЭ*. 2006. Т. 51, № 12. С. 1481–1487.
53. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964.
54. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
55. *Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1964.

56. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через тонкие слои и пленки. Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2010.
57. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть первая. Прямой метод. Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2011.
58. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть вторая. Метод матрицы. Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2012.
59. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры Часть третья. Метод импеданса. Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2012.
60. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть четвертая. Специфические методы. Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2013.
61. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть пятая. Алгоритмические методы. Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2014.
62. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть шестая. Метод исключения. Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2015.
63. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть седьмая. Баланс энергий. Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2015.
64. *Антонец И. В., Щеглов В. И.* Распространение волн через многослойные структуры. Часть восьмая. Периодические неоднородности. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2017.
65. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Применение метода усреднения к расчету распространения электромагнитного излучения через тонкие пленки с различной проводимостью // РЭ. 2007. Т. 52, № 4. С. 403–414.
66. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Расчет коэффициентов отражения, прохождения и поглощения при наклонном падении электромагнитной волны на пластину // РЭ. 2008. Т. 53, № 4. С. 389–402.
67. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Падение электромагнитной волны на одну и две границы раздела сред в условиях перехода от диэлектрического типа распространения к металлическому // РЭ. 2008. Т. 53, № 8. С. 901–913.
68. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственные фазовые характеристики распространения электромагнитной волны через слой с пассивными и активными свойствами // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2008. С. 7–17.
69. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Энергетические параметры распространения электромагнитной волны при падении на проводящую пластину, окруженную проводящей средой // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2008. С. 18–29.

70. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ распространения электромагнитной волны через проводящий слой методом фазовой плоскости // РЭ. 2009. Т. 54, № 5. С. 517–530.
71. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Энергетические характеристики распространения волны через границы раздела сред с комплексными параметрами // РЭ. 2009. Т. 54, № 10. С. 1171–1183.
72. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Роль магнитной проницаемости в задаче о распространении электромагнитной волны через три магнитных среды с потерями // Сборник трудов XXI Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». М.: Изд. МГУ. 2009. С. 939–941.
73. Щеглов В.И., Шавров В.Г., Zubkov В.И., Антонец И.В., Котов Л.Н. Распространение волн через двухслойную структуру из тонких пленок с граничными условиями импедансного типа // Сборник трудов XII Международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2009. С. 108–116.
74. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Эквивалентность скалярного одномерного и векторного электродинамического подходов к задаче о падении волны на пластину, решаемой методами прямым и усреднения // РЭ. 2010. Т. 55, № 2. С. 133–143.
75. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение метода обобщенного импеданса для расчета распространения волн различной природы через слоистую структуру // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: МЭИ–ПЛАНТИ, 2010. С. 144–153.
76. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение метода характеристической матрицы для расчета распространения волн различной природы через слоистую структуру с произвольным числом слоев // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: МЭИ–ПЛАНТИ, 2010. С. 154–172.
77. Antonets I. V., Kotov L. N., Shavrov V. G., Shcheglov V. I. Electromagnetic wave propagation through multi-layer structures consist of thin magnetic films with impedance boundary conditions // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). Moscow: Изд-во физ. фак. МГУ. P. 781–782.
78. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при встречном падении двух одномерных волн на многослойную структуру // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2011. С. 154–165.
79. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Энергетические характеристики распространения встречных волн через многослойную структуру // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2011. С. 166–173.
80. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Распространение волн через многослойные структуры с неоднородностью степенного вида //

- Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2011. С. 174–186.
81. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Интерференционное отражение падающей волны от многослойной структуры при воздействии встречной волны // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2011. С. 187–193.
  82. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Алгоритм определения амплитуд отраженных и проходящих волн при симметричном падении двух встречных волн на многослойную неоднородную структуру // РЭ. 2012. Т. 57, № 1. С. 67–79.
  83. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Применение метода результирующей матрицы для расчета отражения и прохождения электромагнитных волн при падении на многослойные феррит-металл-диэлектрические структуры // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2012. С. 187–200.
  84. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Внешние и внутренние волны в многослойной ступенчато-неоднородной структуре // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2012. С. 201–214.
  85. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Энергетические коэффициенты выхода при падении встречных волн на многослойную структуру // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2012. С. 215–229.
  86. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Исследование распространения волны через границу между двумя диссипативными средами методом векторной модели // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2012. С. 284–288.
  87. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при падении встречных волн на многослойную структуру со ступенчатой неоднородностью // РЭ. 2013. Т. 58, № 1. С. 16–27.
  88. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Применение метода исключения для анализа распространения волн в многослойных средах со случайным распределением параметров слоев // РЭ. 2013. Т. 58, № 12. С. 1149–1159.
  89. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Два простых алгоритма определения амплитуд внешних и внутренних колебаний при распространении встречных волн в многослойной неоднородной структуре // Электронный «Журнал радиоэлектроники», 2013, № 1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan 13/11/text.pdf>
  90. *Антонец И. В., Котов Л. Н., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Метод исключения для расчета распространения волн через среды со ступенчатыми неоднородностями // Электронный «Журнал радиоэлектроники», 2013, № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr13/6/text.pdf>
  91. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Применение метода исключения для расчета распространения волн через среды со ступенчатыми

- неоднородностями специального вида // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2013. С. 130–144.
92. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Исследование методом исключения отражения и прохождения волн при распространении через многослойные среды с барьерными и периодическими неоднородностями // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2013. С. 145–163.
93. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Внешние и внутренние волны при распространении через ограниченную многослойную структуру с периодической неоднородностью // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ, 2014. С. 124–138.
94. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Исследование методом исключения распространения волн через многослойную среду с барьерными неоднородностями // Электронный «Журнал радиоэлектроники», 2015, № 1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan15/22/text.pdf>
95. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 1. Одномерная волна // Электронный «Журнал радиоэлектроники», 2015, № 2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb15/1/text.pdf>
96. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 2. Электромагнитная волна // Электронный «Журнал радиоэлектроники», 2015, № 2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb15/2/text.pdf>
97. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 3. Электромагнитная волна в магнитной среде // Электронный «Журнал радиоэлектроники», 2015, № 3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar15/13/text.pdf>
98. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд внешних и внутренних волн в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью. Часть 4. Волна в диссипативной среде // Электронный «Журнал радиоэлектроники», 2015, № 3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar15/14/text.pdf>
99. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Вторичная модуляция коэффициентов отражения и прохождения волны через ограниченную периодическую структуру // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: ИНФРА-М, 2015. С. 132–144.
100. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Невзаимное распространение электромагнитных волн в многослойной структуре с магнитными элементами // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: ИНФРА-М, 2015. С. 145–159.
101. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Векторная модель распространения волны через границу, разделяющую диссипативные среды // РЭ. 2016. Т. 61, № 3. С. 224–232.

102. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Пространственное распределение амплитуд электромагнитных волн, распространяющихся в ограниченной многослойной структуре с периодической неоднородностью // РЭ. 2017. Т. 62, № 12. С. 1224–1236.
103. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 1. Последовательный пересчет импедансов и амплитуд // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2023, № 1. Режим доступа: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.1>
104. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 2. Падение волны на прямоугольный барьер // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2023, № 1. Режим доступа: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.2>
105. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 3. Падение волны на ступенчато-нарастающий барьер // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2023, № 1. Режим доступа: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.3>
106. *Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 4. Критерий применимости ступенчатого приближения неоднородной среды // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2023, № 5. Режим доступа: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.5.5>
107. *Калашников С. Г.* Электричество. М.: Наука, 1964.
108. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Наука, 1977.
109. *Харкевич А. А.* Основы радиотехники. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
110. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Советское радио, 1964.
111. *Семенов А. А.* Теория электромагнитных волн. М.: Изд. МГУ, 1968.
112. *Даревский А. И., Кухаркин Е. С.* Теоретические основы электротехники. Часть 2. Основы теории электромагнитного поля. М.: Высшая школа, 1965.
113. *Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Спиновые волны в средах с обменом и диссипацией. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021.
114. *Сивей М., Танненвальд П.* Непосредственное наблюдение спин-волнового резонанса / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича // М.: ИЛ, 1961. С. 594–597. М. Н. Seavey, Р. Е. Tannenwald. 1958. V. 1, № 5. P. 168.
115. *Киттель Ч.* Возбуждение спиновых волн в ферромагнетиках однородным СВЧ-полем / В сб. статей: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Пер. с англ. под ред. А. Г. Гуревича // М.: ИЛ, 1961. С. 585–593. С. Kittel // Phys. Rev. 1958. V. 110, № 6. P. 1295.
116. *Шпольский Э. В.* Атомная физика. Т. 1. М.: Наука, 1974.
117. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика (Теоретическая физика, т. VI). М.: Наука, 1988.
118. *Левич В. Г.* Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Наука, 1969.

119. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика (Теоретическая физика, т. V). М.: Наука, 1964.
120. Сена Л. А. Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука, 1977.
121. Чертов А. Г. Единицы физических величин. М.: Высшая школа, 1977.
122. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.
123. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973.
124. Большая советская энциклопедия. Статьи: «Импеданс», «Импеданс акустический». М.: Сов. энц., 1972. Т. 10. С. 154.
125. Физическая энциклопедия. Статьи: «Импеданс», «Импеданс акустический». М.: Сов. энц., 1990. Т. 2. С. 127–129.
126. Карлов Н. В., Кириченко Н. А. Колебания, волны, структуры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
127. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959.
128. Гагарин А. П. Физическая энциклопедия. Т. 3. Статья «Поглощения коэффицент». М.: Большая российская энциклопедия, 1992. С. 661.
129. Гагарин А. П. Физическая энциклопедия. Т. 3. Статья «Поглощательная способность». М.: Большая российская энциклопедия, 1992. С. 655.
130. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989.
131. Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Матричный алгоритм расчета коэффициентов отражения и прохождения при падении двух встречных волн на многослойную структуру // РЭ. 2022. Т. 67, № 9. С. 908–915.
132. Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Алгоритмический метод расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 1. Матричный алгоритм // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2022, № 8. Режим доступа: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.8.5>
133. Антонец И. В., Шавров В. Г., Щеглов В. И. Алгоритмический метод расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 2. Падение волны на наклонный барьер // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2022, № 8. Режим доступа: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.8.9>
134. Халиуллин Д. Я., Третьяков С. А. Обобщенные граничные условия импедансного типа для тонких плоских слоев различных сред (обзор) // РЭ. 1998. Т. 43, № 1. С. 16–29.
135. Красюк Н. П., Дымович Н. Д. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высшая школа, 1974.
136. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз, 1963.



Научное издание

*АНТОНЕЦ Игорь Викторович  
ШАВРОВ Владимир Григорьевич  
ЩЕГЛОВ Владимир Игнатьевич*

**ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ**  
**Часть 2**  
**МЕТОДЫ РАСЧЕТА:**  
**ИМПЕДАНСА, ИСКЛЮЧЕНИЯ, ПЕРЕОТРАЖЕНИЙ**

Редактор *Е.С. Артоболевская*  
Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*  
Оформление переплета: *В.Ф. Киселев*

Подписано в печать 19.12.2023. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,5. Уч.-изд. л. 28,05. Тираж 300 экз.  
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
«Наука/Интерпериодика»  
117342, г. Москва, ул. Бултерова, д. 17 Б  
E-mail: [porsova@fml.ru](mailto:porsova@fml.ru), [sale@fml.ru](mailto:sale@fml.ru)  
Сайт: <http://www.fml.ru>  
Интернет-магазин: <http://www.fmlib.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства  
в АО «Первая Образцовая типография»  
Филиал «Чеховский Печатный Двор»  
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1  
Сайт: [www.chpd.ru](http://www.chpd.ru). E-mail: [sales@chpd.ru](mailto:sales@chpd.ru), тел.: 8 (499) 270-73-59

ISBN 978-5-9221-1980-1



9 785922 119801